Oraux. Série n°3. Nombres complexes

Racines de l'unité

1) ($\clubsuit$) (*Centrale*) On note $U_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$.

a) Montrer que $U_{12} = U_3 U_4 = \{zz',\, (z,z') \in U_3 \times U_4\}$.

b) Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $\varphi : U_{12} \to U_{12} \quad z \longmapsto z^p$. Donner une CNS sur p pour que φ soit une bijection.

Géométrie

2) ($\clubsuit$) a) De quel polynôme de degré 2 les nombres complexes $e^{i\pi/3}$ et $e^{-i\pi/3}$ sont-ils les racines ?

b) Montrer avec $\frac{c-a}{b-a}$ que les points d'affixes a, b, c forment un triangle équilatéral ssi $a^2+b^2+c^2 = a+b+c$.

Remarque : Il est rassurant de trouver une relation symétrique en a, b, c.

3) ($\clubsuit$) Soit a un nombre complexe de module distinct de 1.

a) Simplifier $|1-\overline{a}z|^2 - |z-a|^2$.

b) Montrer que $\varphi : z \longmapsto \dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}$ induit une bijection du cercle U sur lui même, et du disque D sur lui-même.

Sommes de nombres complexes

4) ($\clubsuit$) Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer $S = \sum_{z \in U_p} z^n$.

5) ($\clubsuit$) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On pose $\forall n \in \mathbb{N},\ s_n = 1 + e^{i\theta} + e^{2i\theta} + ... + e^{i(n-1)\theta}$.

a) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur θ pour que la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée.

b) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur θ pour que la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit périodique.

Inégalité triangulaire

6) ($\clubsuit$) Soient $z_1, z_2, ..., z_n$ des nombres complexes non nuls, avec $z_k = \rho_k \exp(i\theta_k)$, où $\rho_k \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta_k \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que $\left|\sum_{k=1}^n z_k\right|^2 = \sum_{k=1}^n (\rho_k)^2 + 2\sum_{j<k} \rho_j \rho_k \cos(\theta_k - \theta_j)$. En déduire $\left|\sum_{k=1}^n z_k\right| \leq \sum_{k=1}^n |z_k|$.

Préciser les cas d'égalité.

7) ($\clubsuit$) a) Comparer $\left|\prod_{k=1}^n (1+z_k) - 1\right|$ et $\prod_{k=1}^n (1+|z_k|) - 1$.

b) En déduire que $\left|\prod_{k=1}^n (1+z_k) - 1\right| \leq \exp\left(\sum_{k=1}^n |z_k|\right) - 1$.

Racines carrées

8) ($\clubsuit$) a) Montrer que les racines de $P(X) = X^2 - 2(1+i)X + 4i$ ont même module.

b) (X MP) Soient α et $\beta \in \mathbb{C}$.

Montrer que les racines de $P(X) = X^2 + \alpha X + \beta$ ont même module ssi $|\alpha|^4 - 4\overline{\alpha}^2\beta \in \mathbb{R}^-$.

Indication : Noter u et $-u$ les racines carrées de $\Delta = \alpha^2 - 4\beta$, et trouver d'abord la CNS : $\alpha\overline{u} + \overline{\alpha}u = 0$.