Oraux. Série n°1. Indications

Schémas de raisonnements

1) a) Si r et $\sqrt{2}+r$ étaient rationnels, alors $\sqrt{2}=(\sqrt{2}+r)-r$ le serait aussi.

b) On suppose que $F \nsubseteq G$ et $G \nsubseteq F$. Il existe $x \in F \setminus G$ et $y \in G \setminus F$. Montrer que $x+y \notin F \cup G$.

2) a) Etudier la fonction $a \longmapsto a+\frac{1}{a}$.

b) On suppose la propriété vraie au rang n :

On a ainsi $\forall (b_1,...,b_n) \in [0,+\infty[^n$, $b_1 b_2 ... b_n = 1 \Rightarrow b_1+b_2+...+b_n \geq n$.

Montrons la propriété au rang $(n+1)$. Soit $(a_1,...,a_{n+1}) \in [0,+\infty[^n$ tel que $a_1 a_2 ... a_n a_{n+1} = 1$.

La seule façon de pouvoir l'hypothèse de récurrence est de faire apparaitre un produit de n réels qui vaut 1.

On considère donc $a_1 a_2 ... a_{n-1}(a_n a_{n+1}) = 1$, et on applique l'hyp de rec : Donc $a_1+a_2+...+a_{n-1}+(a_n a_{n+1}) \geq n$.

Ce qui permet de se ramener à prouver $a_n + a_{n+1} \geq a_n a_{n+1} + 1$.

Or, $a_n + a_{n+1} - a_n a_{n+1} - 1 = (1-a_n)(a_{n+1}-1)$.

Or, quitte à permuter les a_i, on peut supposer que a_n est le minimum et a_{n+1} le maximum.

Comme le produit fait, 1, on a nécessairement $a_n \leq 1 \leq a_{n+1}$.

3) a) s est la symétrie par rapport à $\frac{\pi}{2}$. On a $(s \circ s) = \mathrm{Id}$ et $s' = -1$.

(*analyse*) : Supposons $y'(x) = y(\pi - x)$. Alors y' est continue, c'est-à-dire y de classe C^1.

Et $y''(x) = -y(x)$, donc $y(x) = a\cos x + b \sin x$.

(*synthèse*) : On a alors $y'(x) = -a\sin x + b\cos x$ et $y(\pi - x) = -a\cos + b\sin x$.

Comme $(\cos, \sin)$ est une famille libre, y vérifie (E) ssi $b=-a$.

En conclusion, les solutions sont les $y(x) = a(\cos x - \sin x) = a\sqrt{2}\cos(x+\frac{\pi}{4})$, avec $a \in \mathbb{R}$.

b) (*analyse*) : Supposons $M + M^T = (\operatorname{tr} M)^2\ I_n$. Avec $S = \frac{1}{2}(M+M^T)$, l'équation s'écrit $2S = (\operatorname{tr} S) I_n$.

Donc S est nécessairement de la forme λI_n.

(*synthèse*) : Pour $M = \lambda I_n + A$, avec A antisymétrique, M vérifie (E) ssi $2\lambda = (n\lambda)^2$, donc ssi $\lambda = 0$ ou $\lambda = \frac{2}{n^2}$.

Principe de récurrence et de bon ordre

4) (*existence*) Se ramener au cas $n \in \mathbb{N}$. Justifier brivèment que $n = 3q + r$, avec $r \in \{-1, 0, 1\}$.

Raisonner par récurrence forte sur n, en notant que $q < n$ si $n \geq 1$.

(*unicité*) $n = \sum_{i=0}^N a_i 3^i = \sum_{i=0}^M b_i 3^i$, deux décompositions distinctes. On suppose $N = M$ quitte à ajouter des 0.

On considère $j = \min\{i \mid a_i \neq b_i\}$. Justifier que $a_j - b_j$ est divisible par 3. Conclure.

5) Pour tout entier naturel $p \in \mathbb{N}^*$, il existe un entier n_p tel que $u_{n_p} \in [2\pi p - \frac{1}{2}\alpha, 2\pi p + \frac{1}{2}\alpha]$.

Il suffit de considérer $n_p = \min\{n \in \mathbb{N},\, u_n \geq 2\pi p - \alpha\}$.

Constructions de suites

6) a) Si A non bornée, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $a_n \in A$ tel que $|a_n| \geq n$.

b) Attention : On cherche $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ croissante strictement telle que $\lim_{p\to+\infty} x_{\varphi(p)} = +\infty$.

Construire $\varphi(p)$ par récurrence sur p : on prend $\varphi(p) > \varphi(p-1)$ et $\varphi(p)$ assez grand tel que $\left|x_{\varphi(p)}\right| \geq p$.

Principe des tiroirs

7) En effet, l'un des n intervalles $[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}[$, avec $1 \leq k \leq n$, contient au moins 2 des $(n+1)$ points.

Remarque : Une autre preuve consisterait à classer les x_k par ordre croissant et à raisonner par l'absurde : on a alors $\forall k \geq 1$, $x_k \geq x_{k-1} + \frac{1}{n}$, donc $x_n \geq x_0 + 1$, ce qui contredit $0 \leq x_0 \leq x_n < 1$.

8) a) Posons $N = \operatorname{card} E$. Par le principe des tiroirs, il existe $0 \leq m < n \leq N$ tels que $x_m = x_n$.

Posons $p = n - m \in \mathbb{N}^*$. On a ainsi $x_{m+p} = x_m$, et en composant par $f^{(n-m)}$, on a $\forall n \geq m$, $x_{n+p} = x_n$.

b) Pour chaque $x_0 \in E$, il existe ainsi $m(x_0)$ et $p(x_0)$ tels que $\forall n \geq m$, $x_{n+p} = x_n$.

On considère $M = \max\{m(x_0),\, x_0 \in E\}$ et $P = \operatorname{ppcm}\{p(x_0),\, x_0 \in E\}$. Alors $f^{(M+P)} = f^{(M)}$.

Une autre méthode consiste à se placer directement dans l'ensemble $\mathcal{F}(E,E)$ des fonctions de E dans E, et à considérer dans cet ensemble la suite $(\mathrm{Id}, f, f^{(2)}, f^{(3)}, ...)$. L'ensemble $\mathcal{F}(E,E)$ est fini (de cardinal n^n). Donc il existe nécessairement deux éléments $f^{(m)}$ et $f^{(m+p)}$ égaux, avec $p \in \mathbb{N}^*$.

Arithmétique

9) a) Les multiples de d dans E sont les kn, avec $1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor$. Donc $P(A_d) = \frac{1}{n}\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor$.

b) Comme p et q sont premiers entre eux, on a $A_p \cap A_q = A_{pq}$.

Supposons $n = kpq$. Alors $P(A_{pq}) = \frac{k}{n} = \frac{1}{pq}$, $P(A_p) = \frac{1}{p}$ et $P(A_q) = \frac{1}{q}$, donc $P(A_{pq}) = P(A_p)P(A_q)$.

c) On a $\frac{m}{n} = P(\overline{A_p} \cap \overline{A_q})$. Comme A_p et A_q sont indépendants, il est de même de $\overline{A_p}$ et $\overline{A_q}$.

Donc $\frac{m}{n} = P(\overline{A_p})P(\overline{A_q})$, c'est-à-dire $m = n(1-\frac{1}{p})(1-\frac{1}{q})$.

Remarque : Pour prouver le complément, on utilise $\frac{\varphi(n)}{n} = P(\overline{A_{p_1}} \cap \overline{A_{p_2}} \cap ... \cap \overline{A_{p_r}})$.

En effet, les entiers premiers avec $n = p_1^{m_1}...p_r^{m_r}$ sont ceux qui ne sont divisibles par aucun des p_i.

10) a) Utiliser la factorisation de $a^p - 1$.

b) Noter que si m impair, $x^m + y^m = x^m - (-y)^m$.

Donc pour tout m impair, $x + y$ divise $x^m + y^m$.

Si n n'est pas une puissance de 2, alors n s'écrit mq, avec m impair ≥ 3.

Donc $a^n + b^n = (a^q)^m + (b^q)^m$ est divisible par $a^q + b^q$ donc n'est pas premier.

c) Si p divise F_n, alors $2^{(2^n)} \equiv -1\ [p]$, donc $2^{(2^m)} \equiv (-1)^{(2^{m-n})} = 1\ [p]$, donc p ne divise pas F_m, car $p \geq 3$.

Utiliser $(1+x)(1+x^2)...(1+x^{(2^p)}) = \sum_{k=0}^{2^{p+1}-1} x^k$.

Racines rationnelles d'un polynôme à coefficients entiers

◀ Racines rationnelles d'un polynôme à coefficients entiers :

Si $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ irréductible est racine de $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, avec $a_k \in \mathbb{Z}$, alors p divise a_0 et q divise a_n.

En effet, on a $P(r) = 0$, d'où $\sum_{k=0}^{n} a_k p^k q^{n-k} = 0$. Donc p divise $a_0 q^n$ et par Gauss, p divise a_0.

11) Supposons par l'absurde $\sqrt{n}$ rationnel.

Alors il existe $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ tels que $nb^2 = a^2$, avec $b \in \mathbb{N}^*$ et $\text{pgcd}(a, b) = 1$.

Donc b divise a^2 et est premier avec a^2, donc $b = 1$ (sinon tout facteur premier de b diviserait a).

Autre méthode : $\sqrt{n}$ est racine de $X^2 - n$. Supposons $\sqrt{n}$ rationnel.

Toute racine rationnel d'un polynôme unitaire à coefficients entiers est un entier, donc $\sqrt{n}$ entier ...

12) a) Utiliser $2\cos((n-1)\theta) + 2\cos(n+1)\theta = 4\cos\theta\cos(n\theta)$.

On peut donc définir $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $P_0 = 1$, $P_1 = X$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P_{n+1}(X) = XP_n(X) - P_{n-1}(X)$.

Les coefficients de P_n appartiennent à $\mathbb{Z}$, et $P_n(X) = 2^n X + ...$

Remarque : Il s'agit d'une variante des polynômes de Tchebychev : $P_n(2X) = 2T_n(X)$.

b) Supposons $r = \cos(a\pi) \in \mathbb{Q}$. Supposons $a \in \mathbb{Q}$. Il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $2\cos(na\pi) = 2$.

Alors r racine de $P_n(X) - 2 = 2^n X + ...$ Donc p divise 2^n, ce qui contredit l'hypothèse.

Combinatoire

13) a) $S(p, n) = ...$ si $p < n$

$S(n, n)$ est le nombre de bijections (= injections) de $\{1, ..., n\}$ dans $\{1, ..., n\}$.

Pour calculer $S(n+1, n)$: on se demande comment construire une telle surjection f : il existe un unique élément y de $F = [\![1, n]\!]$ qui admet exactement 2 antécédents x et $x' \in E = [\![1, p]\!]$: on commence par choisir y, puis on choisit ses antécédents $\{x, x'\}$, et ensuite, on est ramené à choisir une bijection de $E \setminus \{x, x'\}$ sur $F \setminus \{y\}$. En déduire $S(n+1, n) = \frac{1}{2}n(n+1)!$

c) Toute application f de $E = \{1, ..., p\}$ dans $F = \{1, ..., n\}$induit une surjection g de E sur $\Delta = f(F)$.

On associe à chaque application f le couple (Δ, g), où $\Delta = f(F)$ et $g : E \to \Delta \quad x \longmapsto f(x)$.

On calcule de deux façons le nombre d'applications f de E dans F : directement par le choix des $f(x) \in F$;

et d'autre part, en comptant le nombre de couples (Δ, g), où Δ partie de E et $g : E \to \Delta$ surjection.

d) On obtient ainsi les $S(p, k)$, avec $0 \leq k \leq n$, par un système linéaire triangulaire (de $n+1$ équations).

La matrice associée est la matrice $M = (\binom{j}{i})_{0\leq i\leq n, 0\leq j\leq n}$ qu'il suffit d'inverser.

Pour justifier que l'inverse de la matrice $M = (\binom{j}{i})_{0\leq i\leq n, 0\leq j\leq n}$ est $M^{-1} = ((-1)^{j-i}\binom{j}{i})_{0\leq i\leq n, 0\leq j\leq n}$, on pourra considérer la matrice de l'endomorphisme $u : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X] \quad P(X) \longmapsto P(X+1)$ dans la base canonique.

14) a) On considère les parties A de cardinal $p+1$ de $E_{n+1} = \{1, 2, ..., n+1\}$. On distingue celles qui contiennent $n+1$ au nombre de $\binom{n}{p}$ et celles qui ne le contiennent pas au nombre de $\binom{n}{p+1}$. En effet, pour les premières, on considère $A \longmapsto A \setminus \{n+1\}$ bijection sur l'ens des parties de cardinal p de E_n.

b) Il y a trois méthodes possibles :

- Pour A partie de cardinal $p+1$ dans $[\![1, n+1]\!]$, on pose $m = \max A = k+1$ et $B = A \setminus \{m\}$ partie de $[\![1, k]\!]$.

Autrement dit, toute partie A est définie par le couple (m, B), où $m = \max A > p$ et B partie de $[\![1, m-1]\!]$. Et $\operatorname{card} A = p+1$ ssi $\operatorname{card} B = p$.

Donc le nombre de couples (m, B) est $\sum_{m=p+1}^{n+1} \binom{m-1}{p} = \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p}$, donc $\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.

- On peut utiliser $\binom{k}{p} = \binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1}$, et on conclut par sommes télescopiques.

- Pour 5/2 :

On considère le coefficient x^{n-p} du DSE de $\left(\frac{1}{1-x}\right)^{p+2} = \left(\frac{1}{1-x}\right)^{p+1} \left(\frac{1}{1-x}\right)$, car $\left(\frac{1}{1-x}\right)^{p+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{p+n}{p} x^n$.

Théorie des ensembles

15) On interpète $\operatorname{card}(A\Delta B)$ comme une distance (distance de A à B). On note $U(A)$ l'ensemble des C telles que $\operatorname{card}(A\Delta C) \leq 1$. Montrer que les $U(A)$, avec $A \in \mathcal{A}$, ne peuvent être deux à deux disjoints.

Remarque : Dans le sujet initial, on avait $n = 10$ et $p = 100$.