Oraux. Série n°1. Entiers naturels

Schémas de raisonnements : raisonnement par l'absurde, raisonnements par analyse-synthèse

1) ($\clubsuit$) a) On sait que $\sqrt{2}$ est irrationnel

Montrer que pour tout rationnel $r \in \mathbb{Q}$, $\sqrt{2} + r$ est irrationnel.

b) Soient F et G deux sev. Montrer que $F \cup G$ est un sev ssi $F \subset G$ ou $G \subset F$.

2) ($\clubsuit$) a) Montrer que $\forall (a, b) \in [0, +\infty[^2$, $ab = 1 \Rightarrow a + b \geq 2$.

b) Démontrer par récurrence que $\forall (a_1, a_2, ..., a_n) \in [0, +\infty[^n$, $a_1 a_2 ... a_n = 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} a_k \geq n$.

Indication : Noter que l'un des a_i est ≤ 1, qu'un autre a_j est ≥ 1 et que dans ce cas $a_i + a_j \geq a_i a_j + 1$.

Penser pour prouver cette dernière inégalité à la factorisation de $xy - x - y + 1$.

3) ($\clubsuit$) a) Déterminer les fonctions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ solutions de l'équation différentielle $(E) : y'(x) = y(\pi - x)$.

Remarque : On utilisera une propriété remarquable de la transformation $s : x \longmapsto \pi - x$.

b) Résoudre dans $\mathcal{M}_n(K)$ l'équation $(E) : M + M^T = (\operatorname{tr} M)^2 \, I_n$ d'inconnue M.

Rappel : $M = S + A$, avec $S = \frac{1}{2}(M + M^T)$ symétrique et $A = \frac{1}{2}(M - M^T)$ antisymétrique.

Principe de récurrence et de bon ordre

Toute partie de $\mathbb{N}$ non vide admet un plus petit élément. Toute partie finie d'un ensemble totalement ordonné (comme $\mathbb{R}$) admet un minimum, et il existe une unique permutation qui classe les points par ordre strictement croissant.

Principe de Fermat (non descente infinie) : il n'existe pas de suite d'entiers strictement décroissante.

4) ($\clubsuit$) Montrer que tout $n \in \mathbb{Z}$ admet une unique écriture de la forme $n = \sum_{i=0}^{N} a_i 3^i$, avec $a_i \in \{-1, 0, 1\}$.

5) ($\clubsuit$) Soit une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croissante avec $u_0 = 0$ et $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

On suppose qu'il existe $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}]$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \leq 2\alpha$.

Montrer qu'il existe une infinité d'entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que $\cos(u_n) \leq \cos(\alpha)$.

Constructions de suites

6) ($\clubsuit$) a) Montrer : $A \subset \mathbb{R}$ n'est pas bornée ssi il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans A telle que $\lim_{n \to +\infty} |a_n| = +\infty$.

b) Montrer : $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas bornée ssi il existe une suite extraite $(x_{\varphi(p)})_{p \in \mathbb{N}}$ tel que $\left| x_{\varphi(p)} \right| \geq p$.

Principe des tiroirs

Pour toute famille $(x_1, ..., x_n)$ d'éléments de E ensemble de cardinal $p < n$, il existe $i < j$ tels que $x_i = x_j$.

Autrement dit, la fonction $f : \{1, 2, ..., n\} \to E \quad k \longmapsto x_k$ n'est pas injective, car $\operatorname{card} E < n$.

7) (♣) Montrer que pour tous réels $x_0, ..., x_n$ dans $[0,1[$, il existe $i < j$ tels que $|x_j - x_i| < \frac{1}{n}$.

8) (♣) Soit $f : E \to E$, avec E fini. On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)} = f \circ f \circ ... f$.

a) Soit $x \in E$. On pose $x_n = f^{(n)}(x)$. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique à partir d'un certain rang.

b) Montrer qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^{(m+p)} = f^{(m)}$.

Arithmétique

◀ Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$ et dans $K[X]$; $\text{pgcd}(a,b) = \text{pgcd}(b,r)$, où $a = bq + r$.

◀ Ecriture d'un entier n en base b ; on obtient le développement de n par divisions euclidiennes successives par b.

L'écriture de n en base 2 contient p chiffres ssi $2^{p-1} \leq n < 2^p$ ssi $p = 1 + \lfloor \log n \rfloor$.

9) (♣) Soit X une v.a. sur $E = [\![1,n]\!]$ muni de la loi uniforme. On considère A_d : “ d divise X ”.

a) Pour $d \in E$, calculer $P(A_d)$.

b) Soient p et q des entiers premiers entre eux. On suppose que p et q divisent n.

Montrer que les événements A_p et A_q sont indépendants.

c) On note m le nombre d'entiers compris entre 1 et n divisibles ni par p ni par q.

Montrer que $m = n(1 - \frac{1}{p})(1 - \frac{1}{q})$.

Complément : De même, considérons le décomposition de $n = p_1^{m_1}...p_r^{m_r}$ en facteurs premiers.

Le nombre d'entiers compris entre 1 et n et premiers avec n vaut $\varphi(n) = n(1 - \frac{1}{p_1})(1 - \frac{1}{p_2})...(1 - \frac{1}{p_r})$.

10) a) (♣) Montrer que si $2^n - 1$ est premier, alors n est premier.

b) (X) Soient a et $b \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si $a^n + b^n$ est premier, alors n est une puissance de 2.

En particulier, si $2^n + 1$ est premier, alors n est une puissance de 2.

c) (★) (*ENS Lyon MP*) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $F_n = 2^{(2^n)} + 1$.

Montrer que, pour $n < m$, F_n et F_m sont premiers entre eux et que $\prod_{k=0}^{n-1} F_k = F_n - 2$.

Racines rationnelles d'un polynôme à coefficients entiers

◀ Racines rationnelles d'un polynôme à coefficients entiers :

Si $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ irréductible est racine de $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, avec $a_k \in \mathbb{Z}$, alors p divise a_0 et q divise a_n.

En effet, on a $P(r) = 0$, d'où $\sum_{k=0}^{n} a_k p^k q^{n-k} = 0$. Donc p divise $a_0 q^n$ et par Gauss, p divise a_0.

11) (♣) (*X*) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\sqrt{n}$ est rationnel ssi $\sqrt{n}$ est un entier (c'est-à-dire n est un carré entier).

Remarque : $\sqrt{n}$ est racine de $X^2 - n$. De façon générale, si $r = \frac{a}{b}$ (avec $\text{pgcd}(a,b) = 1$) est racine rationnelle de $c_0 + c_1 X + ... + c_p X^p$, où les c_i sont des entiers, alors b divise c_p et a divise c_0. Si $c_p = 1$, $r = a \in \mathbb{Z}$.

12) ($\clubsuit$) a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $P_n(2\cos\theta) = 2\cos(n\theta)$.

On pourra utiliser une relation entre $\cos((n-1)\theta)$, $\cos((n-1)\theta)$, $\cos\theta$ et $\cos(n\theta)$.

b) (X) ($\bigstar$) Soit k et $p \in \mathbb{N}^*$, avec p non puissance de 2. Montrer si $\cos(a\pi) = \frac{k}{p}$, alors a est irrationnel.

Combinatoire

13) ($\clubsuit$) (X) Pour n et $p \in \mathbb{N}$, on note $E_{p,n}$ l'ensemble des surjections de $\{1, ..., p\}$ dans $\{1, ..., n\}$.

a) Donner la valeur de $S(p, n) = \operatorname{card} E_{p,n}$ lorsque $p \leq n+1$.

b) Quel est le nombre d'applications de $\{1, ..., p\}$ dans $\{1, ..., n\}$?

c) Montrer que $n^p = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} S(p, k)$. On coibnvient que $S(0, 0) = 1$ et $S(p, 0) = 0$ si $p \in \mathbb{N}^*$.

d) En déduire que $S(p, n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p$.

14) ($\clubsuit$) Soient $0 \leq p \leq n$. Donner des preuves (de préférence combinatoires) des identités suivantes :

a) $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$; b) $\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.

Indication : Dans le second cas, considérer le maximum d'une partie de $p+1$ éléments de $[\![1, n+1]\!]$.

Théorie des ensembles

15) ($\clubsuit$) (X) Soit E un ensemble. Pour A et B des parties de E, on pose $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

a) A-t-on : $(A\Delta B = A\Delta C) \Rightarrow (B = C)$? *Suggestion* : Utiliser les fonctions indicatrices 1_A.

b) Montrer que $\operatorname{card}(A\Delta B) \leq \operatorname{card}(A\Delta C) + \operatorname{card}(B\Delta C)$.

c) On pose $n = \operatorname{card} E$. Soit $\mathcal{A}$ un ensemble de p parties de E, avec $(n+1)p > 2^n$.

Montrer qu'il existe A et B dans $\mathcal{A}$ et distincts telles que $\operatorname{card}(A\Delta B) \leq 2$.

Indication : On interpète $\operatorname{card}(A\Delta B)$ comme une distance (distance de A à B). On note $U(A)$ l'ensemble des C telles que $\operatorname{card}(A\Delta C) \leq 1$. Montrer que les $U(A)$, avec $A \in \mathcal{A}$, ne peuvent être deux à deux disjoints.