

Exercice A

1) Comme D est compact, f est bornée et atteint ses bornes. On a $\inf f \leq 0 \leq \sup f$.

Si $\sup f > 0$, alors il existe $X_0 \in U$ tel que $f(X_0) = \sup f$ (car f est nulle sur C). Comme U est ouvert et f différentiable en X_0 , alors $\vec{\nabla} f(X) = \vec{0}$. Si $\inf f < 0$, on se ramène au cas précédent en considérant $-f$.

Sinon, on a $\inf f = 0 = \sup f$, donc f est identiquement nulle, et tout $X \in U$ convient.

2) a) Comme $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, il existe $r \geq 0$ tel que $\forall x \in E, \|x\| > r \Rightarrow f(x) > f(\vec{0})$.

f est continue sur le compact $K = B(\vec{0}, r)$, donc $\inf_K f$ est atteint en un point a .

Pour $x \in E \setminus K$, on a $\|x\| > r$, donc $f(x) > f(\vec{0}) \geq f(a)$ car $\vec{0} \in K$.

Donc $f(a) = \inf_E f$. Ainsi, f est minorée sur E et atteint sa borne inférieure.

b) Immédiat si f est identiquement nulle. On suppose désormais que f n'est pas identiquement nulle.

Il existe $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) > 0$.

Comme $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, il existe $r > \|x_0\|$ tel que $\forall x \in E, \|x\| > r \Rightarrow f(x) < f(x_0)$.

f est continue sur le compact $K = B(\vec{0}, r)$, donc $\sup_K f$ est atteint en un point a .

Pour $x \in E \setminus K$, on a $\|x\| > r$, donc $f(x) < f(x_0) \leq f(a)$ car $x_0 \in K$.

Donc $f(a) = \sup_E f$. Comme E est ouvert, $\nabla f(a) = \vec{0}$.

Exercice B

1) Par le cours, $H_f(a, b) \in S_2^-(\mathbb{R})$, donc ses valeurs propres λ et μ sont ≤ 0 .

A fortiori, on a $\Delta f(a, b) = \text{tr}(H_f(a, b)) = \lambda + \mu \leq 0$.

2) Supposons que f n'est pas négative sur D : elle prend au moins une valeur strictement positive. Comme D est compact, f atteint son maximum, et on a $\max f > 0$. Donc f atteint son maximum en un point intérieur à D , et par 1), le laplacien en ce point est négatif. D'où une contradiction avec l'hypothèse $\Delta f > 0$ sur U .

Exemple : $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. On a $\Delta f(x, y) = 4$.

3) Soit $\varepsilon > 0$. On considère $g(x, y) = f(x, y) + \varepsilon(x^2 + y^2 - 1)$. On a $\Delta g(x, y) = \Delta f(x, y) + 4\varepsilon > 0$ sur V .

De plus, g est nulle sur C . Par 3), g est négative sur D , donc $f(x, y) \leq \varepsilon(1 - x^2 - y^2)$ sur D .

En faisant tendre ε vers 0^+ , on obtient $f(x, y) \leq 0$ sur D .

4) On a $\Delta(f_1 - f_2) = 0$. Par 4) appliqué à $f_1 - f_2$, on obtient $f_1 - f_2 \leq 0$ sur V .

En inversant les rôles de f_1 et f_2 , on obtient $f_1 = f_2$ sur U .