

TD n°19. Fonctions de plusieurs variables

Exercice A. Extrema

1) Théorème de Rolle en dimension 2

Soit D le disque unité de $\mathbb{R}^2$, et U l'intérieur de D (c'est-à-dire le disque unité ouvert).

Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ $X \mapsto f(X)$ continue, et de classe C^1 sur U . On note $\vec{\nabla} f(X)$ le gradient de f en X .

On suppose que f est nulle sur le cercle unité. Montrer qu'il existe $X \in U$ tel que $\vec{\nabla} f(X) = \vec{0}$.

Indication : Considérer les extrema de f sur le compact D .

2) a) Condition suffisante pour qu'une fonction atteigne sa borne inférieure sur $E = \mathbb{R}^p$.

Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Montrer que f est minorée et qu'il existe $a \in E$ tel que $f(a) = \inf_E f$.

Indication : Considérer r tel que $\forall x \in E, \|x\| > r \Rightarrow f(x) > f(\vec{0})$.

b) Théorème de Rolle généralisé

Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ de classe C^1 et positive telle que $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Montrer qu'il existe $a \in E$ tel que $\vec{\nabla} f(a) = \vec{0}$.

3) Soient $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $v \in \mathbb{R}^n$. On considère $f(X) = (X \mid AX) - (v \mid X)$.

a) Montrer que $\vec{\nabla} f(X) = 2AX - v$. *Remarque* : Le plus simple est d'utiliser un DL.

b) Montrer que f admet un unique point critique. Évaluer $f(X_0 + H)$ et en déduire $\inf f$.

Exercice B. Unicité au problème de Dirichlet : $\Delta f = g$

On note D le disque unité de $\mathbb{R}^2$, C le cercle unité, et U le disque unité ouvert (c'est-à-dire l'intérieur de D).

Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur D et de classe C^2 sur U . On définit sur U le laplacien de f par : $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

1) On suppose que f admet en $(a, b) \in U$ un maximum local. Montrer que $\Delta f(a, b) \leq 0$.

2) On suppose que $\Delta f > 0$ sur U , et que f est identiquement nulle sur le cercle unité C .

En raisonnant par l'absurde, montrer que f est négative sur D .

Donner sans justification un exemple d'une telle fonction, strictement négative sur U .

3) Démontrer que 2) reste vrai si on suppose seulement $\Delta f \geq 0$ au lieu de $\Delta f > 0$.

Indication : Considérer, pour $\varepsilon > 0$, la fonction $g(x, y) = f(x, y) + \varepsilon(x^2 + y^2 - 1)$.

4) Soient f_1 et f_2 continues sur D coïncidant sur C et telles que $\Delta f_1 = \Delta f_2$ sur U . Que peut-on dire de f_1 et f_2 ?