

TD n°18. Fonctions de plusieurs variables. Corrigé.

Exercice A

On a $\forall j, f(A) = \sum_{i=1}^n a_{ij} C_{ij}$, donc $\frac{\partial f}{\partial a_{ij}}(A) = C_{ij}$, car les autres C_{kj} ne dépendent pas de a_{ij} .

Donc $\nabla f(A)$ est le vecteur de $\mathbb{R}^{(n^2)}$ dont les coefficients sont les C_{ij} .

Exercice B

1) En dérivant (E), par rapport à x , on obtient $t \frac{\partial f}{\partial x_i}(t\vec{x}) = t^\alpha f(\vec{x})$, d'où $\frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) = t^{\alpha-1} f(x, y)$.

2) En dérivant (E) par rapport à t , on obtient : $\vec{x} \cdot \nabla f(t\vec{x}) = \alpha t^{\alpha-1} f(\vec{x})$, d'où le résultat avec $t = 1$.

Réciproquement, supposons $\vec{x} \cdot \nabla f(\vec{x}) = \alpha f(\vec{x})$. Alors $t\vec{x} \cdot \nabla f(t\vec{x}) = \alpha f(t\vec{x})$.

Donc $tg'(t) = \alpha g(t)$ pour tout $t > 0$, d'où $g(t) = kt^\alpha$ pour tout $t > 0$.

Comme $k = g(1) = f(\vec{x})$, on obtient $g(t) = t^\alpha f(\vec{x})$, d'où le résultat.

Exercice C

1) a) Comme X et Y sont bornées, X et Y sont d'espérances finies, ainsi que $X + Y$.

Comme f est bornée sur tout segment, $f(X + Y)$ est d'espérance finie.

On prend $\mu = E(X)$. Par a), on a $f(X) \geq f(\mu) + f'(\mu)(X - \mu)$.

En passant aux espérances, on obtient $f(X) \geq f(\mu) + 0 = f(\mu) = f(E(X))$.

b) $f(X + Y) \geq f(X) + f'(X)Y$ donc $E(f(X + Y)) \geq E(f(X)) + E(f'(X)Y)$.

Comme X et Y sont indépendantes, alors $E(f'(X)Y) = E(f'(X))E(Y) = 0$.

Donc $E(f(X + Y)) \geq E(f(X))$.

2) a) $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j s_{ij} = (X | SX) \geq 0$.

b) On a $g'(t) = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, \dots, tx_n)$.

Donc $g''(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(tx_1, \dots, tx_n) = X^T S X$, où $S = H_f(tX)$. Donc $g''(t) \geq 0$.

c) Par 1) a), $g(t) \geq g(0) + tg'(0)$. Pour $t = 1$, on obtient $g(1) \geq g(0) + g'(0)$.

Donc $f(X) \geq f(0) + \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{0}) = f(0) + (X | \text{grad } f(0))$.

d) On applique c) à la fonction $F(X) = f(X + X_0)$. On a notamment $\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X_0)$.

e) On procède comme au c) et d) en utilisant une fonction partielle : $g(t) = f(X + t(Y - X))$.

On a $g''(t) = (Y - X)^T S (Y - X) \geq 0$, où $S = H_f(X + t(Y - X))$.

Donc g est convexe, et ainsi $\forall t \in [0, 1], g(t) = g((1-t)0 + t1) \leq (1-t)g(0) + tg(1)$, d'où le résultat.

Exercice D

1) Supposons par l'absurde $h''(a) > 0$. On a $h'(a) = 0$, donc $h(x) - h(a) \sim \frac{1}{2}(x-a)^2 h''(a)$.

D'où $h(x) > h(a)$ sur un voisinage de a privé de a , ce qui contredit l'hypothèse.

2) En appliquant 1) aux fonctions partielles $x \mapsto f(x, b)$, et $y \mapsto f(a, y)$, on a : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) \leq 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) \leq 0$.

Autre méthode conseillée : Par le cours, la Hessienne $H_f(a, b) \in S_2^-(\mathbb{R})$ matrice symétrique négative.

A fortiori, $\Delta f(a, b) = \text{tr}(H_f(a, b)) = \lambda + \mu \leq 0$, où λ et μ sont les valeurs propres de $H_f(a, b)$.

3) Supposons que f n'est pas négative sur D : elle prend au moins une valeur strictement positive. Comme D est compact, f atteint son maximum, et on a $\max f > 0$. Donc f atteint son maximum en un point intérieur à D , et par 2), le laplacien en ce point est négatif. D'où une contradiction avec l'hypothèse $\Delta f > 0$ sur U .

Exemple : $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. On a $\Delta f(x, y) = 4$.

4) Soit $\varepsilon > 0$. On considère $g(x, y) = f(x, y) + \varepsilon(x^2 + y^2 - 1)$. On a $\Delta g(x, y) = \Delta f(x, y) + 4\varepsilon > 0$ sur V .

De plus, g est nulle sur C . Par 3), g est négative sur D , donc $f(x, y) \leq \varepsilon(1 - x^2 - y^2)$ sur D .

En faisant tendre ε vers 0^+ , on obtient $f(x, y) \leq 0$ sur D .

5) On a $\Delta(f_1 - f_2) = 0$. Par 4) appliqué à $f_1 - f_2$, on obtient $f_1 - f_2 \leq 0$ sur V .

En inversant les rôles de f_1 et f_2 , on obtient $f_1 = f_2$ sur U .

Exercice C

1) Comme D est compact (fermé borné) et g continue, alors g atteint sa borne supérieure en un point $x_0 \in D$.

Or, f est strictement positive, donc g est strictement positive sur U et nulle sur la sphère unité.

Donc $g(x_0) > 0$ et $x_0 \in U$, donc on a nécessairement $\nabla g(x_0) = \vec{0}$ (condition nécessaire d'extremum local).

2) Or, on a $\nabla g(\vec{x}) = (1 - \|\vec{x}\|^2)\nabla f(\vec{x}) - 2f(\vec{x})\vec{x}$.

En effet, $f(x+h) = (1 - \|\vec{x}\|^2 - 2\langle x, h \rangle)(f(x) + \langle \nabla f(\vec{x}), h \rangle) + o(\|h\|) = f(x) + \langle v, h \rangle + o(\|h\|)$,

où $v = (1 - \|\vec{x}\|^2)\nabla f(\vec{x}) - 2f(\vec{x})\vec{x}$.

Comme $\nabla g(\vec{x}_0) = \vec{0}$, on obtient $\nabla f(\vec{x}_0) = \lambda \vec{x}_0$, avec $\lambda = \frac{2f(\vec{x}_0)}{1 - \|\vec{x}_0\|^2} > 0$.

Remarque : On peut trouver l'expression du gradient par les coordonnées : $g(x) = (1 - \sum_{i=1}^n x_i^2)f(x_1, \dots, x_n)$.

Exercice C

1) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} U'(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$.

Et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) = \left(\frac{y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right) U'(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) + \frac{x^2}{x^2 + y^2 + z^2} U''(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$.

Donc $(\Delta f)(x, y, z) = \frac{2}{r} U'(r) + U''(r) = \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2}(rU)$.

2) On cherche donc U vérifiant $\frac{1}{r}(rU)'' = \lambda U$. En posant $\varphi(r) = rU(r)$, l'équation s'écrit : $\varphi'' = \lambda \varphi$.

Sachant qu'on veut $\varphi(0) = 0$, donc on obtient les $\varphi(r) = k \sin(\omega r)$ ou $k \text{sh}(\omega r)$ ou kr selon le signe de λ .

Donc $U(r) = k \frac{\sin(\omega r)}{\omega r}$ ou $U(r) = k \frac{\text{sh}(\omega r)}{\omega r}$ ou $U(r) = k$, avec respectivement $\lambda = -\omega^2$, ω^2 et 0 (avec $\omega > 0$).

Ces fonctions sont en fait C^∞ , comme séries entières de rayon $+\infty$ en la variable $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Exercice D. Différentielle d'une forme quadratique

1) En se plaçant dans une BON $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ composée de vecteurs propres de u , on a $\langle u(x), x \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$.

2) On a dans la base $\mathcal{B}$, $f(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 - \sum_{i=1}^n a_i x_i$. D'où $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = 2\lambda_i x_i - a_i$. Donc $\nabla f(x) = 2u(x) - a$.

Autre méthode : $f(x+h) = \langle u(x), x \rangle + 2\langle u(x), h \rangle + \langle u(h), h \rangle - \langle a, x \rangle - \langle a, h \rangle = f(x) + \langle 2u(x) - a, h \rangle + \mathfrak{o}(\|h\|)$.

Donc $df(x) \cdot h = \langle 2u(x) - a, h \rangle$, c'est-à-dire $\nabla f(x) = 2u(x) - a$.

3) $\nabla f(z) = \vec{0}$ ssi $u(z) = \frac{1}{2}a$, donc z est unique car u est bijective (0 n'est pas valeur propre de u).

On a $f(z+h) = f(z) + 0 + \langle u(h), h \rangle$, donc $f(z+h) \geq f(z)$, avec égalité ssi $\langle u(h), h \rangle = 0$, c'est-à-dire $h = 0$.

Exercice B

1) Pour $\vec{x} \neq \vec{0}$, on a $f(\vec{x}) \leq \frac{|xy|}{\|\vec{x}\|} \leq \|\vec{x}\|$, donc par pincement, f est continue en $\vec{0}$.

2) On a $f(x, 0) = 0$, donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$.

Pour $(x, y) \neq (0, 0)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, x) = \frac{y \cos(xy)}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{x \sin(xy)}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$, donc $\lim_{t \rightarrow 0, t > 0} \frac{\partial f}{\partial x}(t, t) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \neq 0$.

On peut aussi utiliser $\frac{\partial f}{\partial x}(0, t) = \frac{t}{|t|} \rightarrow 1 \neq 0$ lorsque $t \rightarrow 0^+$.

2) z est nécessairement un point critique. Or, $\nabla f(z) = \vec{0}$ ssi $u(z) = a$, donc z est unique car u est bijective (0 n'est pas valeur propre de u).

On a $f(z+h) = f(x) + 0 + \langle u(h), h \rangle$, donc $f(z+h) \geq f(z)$, avec égalité ssi $\langle u(h), h \rangle = 0$, c'est-à-dire $h = 0$.

Problème

1) a) L'application $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad t \mapsto f(tx)$ est dérivable, et $\varphi'(t) = \nabla f(tx) \cdot x$.

Comme $\varphi(1) - \varphi(0) = \int_0^1 \varphi'(t) dt$, alors on obtient $f(x) = f(0) + \int_0^1 \nabla f(tx) \cdot x dt$.

b) Supposons $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = 0$ pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Alors $\nabla f(x) = \vec{0}$ pour tout x . Par a), $f(x) = f(0) + \int_0^1 0 = f(0)$.

Réciproquement, toute fonction f constante convient. Les solutions sont donc les solutions constantes.

c) Supposons $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = 0$ pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ et $x \in \mathbb{R}^n$.

Par a), les $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ sont constantes. Donc il existe $v \in \mathbb{R}^n$ tel que $\forall x, \nabla f(x) = v$.

Donc $f(x) = f(0) + \int_0^1 v \cdot x dt = f(0) + v \cdot x$.

Réciproquement, toute fonction affine $f : x \mapsto v \cdot x + b$ convient, puisque $\nabla f(x) = v$ constante.

2) Les applications $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ sont nulles ssi les f_i sont constantes, c'est-à-dire ssi f est constante.

Les applications $\frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_j}$ sont nulles ssi f est affine (c'est-à-dire $f(x) = Ax + b$, où A matrice constante).

Remarque : Fixons x et posons $\forall t \in [0, 1], \varphi(t) = f(tx)$, on a $\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \int_0^1 (1-t)\varphi''(t) dt$.

Si on suppose toutes les dérivées partielles de f d'ordre 2 nulles, on a $\varphi''(t) = 0$.

Donc $\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0)$, c'est-à-dire $f(x) = f(0) + df(0) \cdot x$. Donc f est affine.

3) Par hypothèse, on a $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = -\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)$ pour tous (i, j) et pour tout x .

Donc $\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_k \partial x_j}(x) = -\frac{\partial^2 f_j}{\partial x_k \partial x_i}(x)$ pour tous (i, j, k) et pour tout x .

On en déduit (avec Schwarz) que $\frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_j}(x) = -\frac{\partial^2 f_j}{\partial x_i \partial x_k}(x) = \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}(x) = -\frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_j}(x)$. Donc $\frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_j}(x) = 0$.

Il résulte de 2) b) que f est affine de la forme $f(x) = Ax + b$.

Comme $A = J(x)$, alors A est par hypothèse une matrice antisymétrique.

La réciproque est vraie, puisque si $f(x) = Ax + b$, alors $J(x) = A$ pour tout x .

4) a) On a $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} - \frac{\partial f_j}{\partial x_i} = 0$, car par le théorème de Schwarz $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$.

Donc $J(x)$ est symétrique.

b) On suppose $J(x)$ symétrique, c'est-à-dire $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)$.

Considérons $U : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $U(x) = \sum_{i=1}^n x_i \int_0^1 f_i(tx) dt$. Il s'agit de prouver que $\forall j$ que $f_j(x) = \frac{\partial U}{\partial x_j}(x)$.

On a $\frac{\partial U}{\partial x_j}(x) = \int_0^1 f_j(tx) dt + \sum_{i=1}^n x_i \int_0^1 t \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(tx) dt$.

En effet, la dérivée de $x_j \mapsto f_i(tx) = f_i(tx_1, \dots, tx_n)$ est $t \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(tx_1, \dots, tx_n)$.

Et on utilise la dérivée des intégrales à paramètre (dérivation sous la signe $\int$).

On obtient donc $\frac{\partial U}{\partial x_j}(x) = \int_0^1 f_j(tx) \, dt + x_i \sum_{i=1}^n \int_0^1 t \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(tx) \, dt = \int_0^1 f_j(tx) \, dt + \int_0^1 \sum_{i=1}^n t x_i \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(tx) \, dt$.

On reconnaît dans le terme $\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(tx)$ la dérivée $\varphi'(t)$ de l'application $\varphi(t) = f_j(tx)$.

On obtient donc $\frac{\partial U}{\partial x_j}(x) = \int_0^1 \varphi(t) \, dt + \int_0^1 t\varphi'(t) \, dt = [t\varphi(t)]_0^1 = \varphi(1) = f_j(x)$.

3) En posant $g(u, v) = f(x, y) = f(u, u + v)$, avec $(x, y) = (u, u + v)$, c'est-à-dire $(u, v) = (x, y - x)$.

On a $\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$. Donc (E) équivaut à $\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = g(u, v)$, c'est-à-dire $g(u, v) = k(v) \exp(u)$.

On en conclut que les solutions sont les $f(x, y) = e^x k(y - x)$, où $k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 .

4) a) Soit $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad (u, v) \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^2 telle que $\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = 0$, c'est-à-dire $\frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial F}{\partial v} = 0$.

Par le cours, il existe $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 tel que $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial F}{\partial v}(u, v) = h(v)$.

D'où $\frac{\partial}{\partial v}[F(u, v) - H(v)] = 0$, où H est une primitive de h .

On en déduit qu'il existe $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, F(u, v) = g(u) + H(v)$.

b) On considère le changement de variable $\begin{cases} u = x + ct \\ v = x - ct \end{cases}$, c'est-à-dire $\begin{cases} x = (u + v)/2 \\ v = (u - v)/2c \end{cases}$

On pose $F(u, v) = f(\frac{1}{2}(u + v), \frac{1}{2c}(u - v))$. On a $\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}(u, v) = \frac{1}{4} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right](x, y)$.

Ainsi, si f vérifie (E), alors $\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = 0$. Donc il existe g et $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, F(u, v) = g(u) + h(v) \text{ c'est-à-dire } \forall (x, t) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x, t) = g(x + ct) + h(x - ct)$$

c) On suppose $f(x, t) = F(x)G(t)$. L'équation (E) est alors vérifiée ssi $\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2, F''(x)G(t) = c^{-2}F(x)G''(t)$.

Comme x et t indépendants et F et G non nulles, ceci équivaut à $\begin{cases} F'' = kF \\ G'' = kc^2G \end{cases}$ où k est une constante.

Comme on cherche des solutions bornées, on prend k strictement négatif; c'est-à-dire de la forme $k = -\omega^2$.

(en effet, si $k > 0$, on obtient des solutions en ch et sh. Si $k = 0$, on obtient des polynômes de degré ≤ 1 . Dans ce dernier cas, seules les fonctions constantes conviendraient, mais on veut $F(0) = G(0) = 0$).

Comme on veut $F(0) = G(0) = 0$, alors les solutions sont de la forme $F(x) = a \sin(\omega x)$ et $G(t) = b \sin(c\omega t)$.

En conclusion, les $f(x, t) = A \sin(\omega x) \sin(c\omega t)$, où $\omega \in \mathbb{R}_+^*$, sont solutions.

4) bis) a) On a $\frac{\partial F}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(u + v, u - v) + \frac{\partial f}{\partial y}(u + v, u - v)$.

Donc $\frac{\partial^2 F}{\partial v \partial u}(u, v) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)(u + v, u - v)$.

Or, par le théorème de Schwarz, on a $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, car f est de classe C^2 .

Donc $\frac{\partial^2 F}{\partial v \partial u}(u, v) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)(u + v, u - v)$.

b) L'équation équivaut à $\frac{\partial^2 F}{\partial v \partial u}(u, v) = 2$.

En intégrant par rapport à v , on obtient : $\frac{\partial F}{\partial u}(u, v) = 2v + g(u)$.

En intégrant par rapport à u , on obtient : $F(u, v) = 2uv + G(u) + h(v)$, où G et h sont de classe C^2 .

On a $u = \frac{1}{2}(x + y)$ et $v = \frac{1}{2}(x - y)$. On en déduit que les solutions de (E) sont les $f(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 - y^2) + k(x + y) + h(x - y)$, où k et h sont de classe C^2 .

Remarque : (E) étant une équation linéaire, et comme $(x, y) \mapsto x^2$ étant une solution évidente, il suffit d'ajouter à cette solution particulière la solution générale de (H) , donc peut aussi obtenir les solutions sous la forme $f(x, y) = x^2 + K(x + y) + H(x - y)$.

4) On pose $\varphi(t) = f(tx)$. On a $\varphi'(t) = \nabla f(tx) \cdot x = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)$.

Comme $\varphi(1) = \varphi(0) + \int_0^1 \varphi'(t) dt$, alors on obtient bien $f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^n x_i \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) dt$.

6) a) Par récurrence : $X(t)$ de classe $C^n \Rightarrow AX(t)$ de classe $C^n \Rightarrow X(t)$ de classe C^{n+1} .

b) $X_j(t) = e^{\lambda_j t} Z_j$, donc $w(t) = \exp(t \operatorname{tr} A) \det(Z_1, \dots, X_n) = w(0) \exp(t \operatorname{tr} A)$.

c) Pour tout $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, on a $Y_j(t)$ de la forme $\sum_{i=1}^n p_{ij} X_i(t)$, puisque $Y_j \in \operatorname{Vect}(X_1, \dots, X_n)$.

D'où l'égalité matricielle $(Y_1(t), \dots, Y_n(t)) = (X_1(t), \dots, X_n(t))P$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Donc $\det(Y_1(t), \dots, Y_n(t)) = (\det P) \det(X_1(t), \dots, X_n(t))$, ce qui permet de retrouver la même relation.

d) On a $(E) : \begin{cases} x'(t) = \lambda x(t) + y(t) \\ y'(t) = \lambda y(t) \end{cases} \quad \begin{cases} x'(t) = \lambda x(t) + \beta e^{\lambda t} \\ y'(t) = \beta e^{\lambda t} \end{cases} \quad \begin{cases} x'(t) = \alpha e^{\lambda t} + \beta t e^{\lambda t} \\ y'(t) = \beta e^{\lambda t} \end{cases}, \text{ où } \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$

On a donc $X_1(t) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X_2(t) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$. Donc $w(t) = e^{2\lambda t} = w(0) \exp(t \operatorname{tr} A)$.

10) a) L'application linéaire $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est bijective ssi $\det \varphi \neq 0$, c'est-à-dire ssi $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} \neq 0$, donc ssi $\alpha \neq \beta$.

Dans ce cas, φ est sa propre différentielle en chaque point, donc inversible et φ est un C^1 -difféomorphisme.

b) On a $g(u, v) = f(x, y) = f(u + v, \alpha u + \beta v)$.

Donc $\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \alpha \frac{\partial f}{\partial y} \right) (u + v, \alpha u + \beta v)$, ce qu'on note souvent abusivement $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} + \alpha \frac{\partial}{\partial y}$.

De même $\frac{\partial g}{\partial v}(u, v) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \beta \frac{\partial f}{\partial y} \right) (u + v, \alpha u + \beta v)$.

Et $\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (\alpha + \beta) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \alpha \beta \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ et $\frac{\partial^2}{\partial u^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\alpha \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

c) *Premier cas* : $b^2 - 4ac > 0$. Alors il existe $\alpha \neq \beta$ tel que $a + br + cr^2 = (r + \alpha)(r + \beta)$.

Alors $a \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ ssi $\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = 0$, donc ssi $g(u, v) = F(u) + G(v)$.

Donc les solutions de (E) sont les $f(x, y) = F\left(\frac{y - \beta x}{\alpha - \beta}\right) + G\left(\frac{y - \alpha x}{\beta - \alpha}\right)$, avec F et $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 .

Autrement dit, ce sont les $f(x, y) = \widehat{F}(y - \beta x) + \widehat{G}(y - \alpha x)$, avec $\widehat{F}$ et $\widehat{G} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 .

Second cas : Supposons $a + br + cr^2 = (r - \alpha)^2$. On choisit $\beta \neq \alpha$.

Alors $a \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ ssi $\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} = 0$, donc ssi $g(u, v) = F(v) + uG(v)$.

Donc les solutions de (E) sont les $f(x, y) = \widehat{F}(y - \alpha x) + (y - \beta x)\widehat{G}(y - \alpha x)$, avec $\widehat{F}$ et $\widehat{G} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 .

Exercice A.

Cogito 66) Montrer que les fonctions $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ vérifiant $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = 0$ pour tous i et $j \in \{1, 2, \dots, p\}$ sont les fonctions $f : X \mapsto AX + B$, avec $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ et $B \in K^n$.

Cogito 69) Fonctions à symétrie sphérique et vecteurs propres du laplacien.

Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ $(x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$ une application de classe C^2 définie sur $\mathbb{R}^3$ et à symétrie sphérique.

Autrement dit, il existe $U : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $f(x, y, z) = U(r)$, où $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Rappel : Le laplacien Δf est défini par $(\Delta f)(x, y, z) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right) (x, y, z)$.

a) Montrer que le laplacien de f vaut : $\Delta f(x, y, z) = \frac{2}{r}U'(r) + U''(r) = \frac{1}{r}(rU)''(r)$.

b) Déterminer les vecteurs propres du laplacien qui sont à symétrie sphérique.

Autrement dit, déterminer les fonctions f à symétrie sphérique vérifiant $\Delta f = \lambda f$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.