

TD n°18. Fonctions de plusieurs variables

Exercice A

1) Donner le gradient de $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(A) = \det A$ où $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$.

Indication : Exprimer $\nabla f(A)$ à l'aide des cofacteurs C_{ij} de A .

Remarque : On en déduit $\det(A + H) = \det(A) + \langle C, H \rangle + o(\|H\|)$ lorsque $H \rightarrow O_n$,

où C est la matrice des cofacteurs C_{ij} et $\langle C, H \rangle = \sum_{i,j} C_{ij} h_{ij} = \text{tr}(C^T H)$.

Exercice B. Fonctions homogènes et équation d'Euler

Soit $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_p) \mapsto f(x_1, x_2, \dots, x_p)$.

On dit que f est α -homogène ssi $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^p, \forall t \in \mathbb{R}_+^*, f(t\vec{x}) = t^\alpha f(\vec{x})$.

1) Montrer que si f est α -homogène et de classe C^1 , alors les $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ sont $(\alpha - 1)$ -homogènes.

2) Soit $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 . Montrer que f est α -homogène ssi f vérifie

$$(E) : \forall (x_1, x_2, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p, \sum_{i=1}^p x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2, \dots, x_p) = \alpha f(x_1, x_2, \dots, x_p)$$

Indication : Considérer $g(t) = f(t\vec{x}) = f(tx_1, tx_2, \dots, tx_p)$.

Pour la réciproque, montrer que si f vérifie (E), g vérifie $tg'(t) = \alpha g(t)$.

Exercice C. Fonctions convexes

1) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 et convexe, c'est-à-dire $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) \geq 0$.

a) Soit X une variable aléatoire réelle telle que X et $f(X)$ sont d'espérances finies.

Montrer que $E(f(X)) \geq f(E(X))$.

b) Soient X et Y deux v.a. réelles bornées indépendantes. On suppose $E(Y) = 0$.

Montrer que $E(f(X + Y)) \geq E(f(X))$.

2) Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto f(X) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de classe C^2 .

On considère pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, la matrice symétrique

$$h(X) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$$

On suppose que pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, la matrice $H_f(X)$ est *symétrique positive*.

a) Soit $S = (s_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ une matrice *symétrique positive*. Montrer : $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j s_{ij} \geq 0$.

b) On fixe $X \in \mathbb{R}^n$, et on considère $\forall t \in \mathbb{R}, g(t) = f(tX) = f(tx_1, tx_2, \dots, tx_n)$.

Calculer $g''(t)$ en fonction de f et de X . En déduire que g est convexe.

c) Montrer que $\forall X \in \mathbb{R}^n, f(X) \geq f(0) + (X \mid \text{grad } f(0))$.

d) En déduire que $\forall X_0 \in \mathbb{R}^n, \forall X \in \mathbb{R}^n, f(X) \geq f(X_0) + (X - X_0 \mid \text{grad } f(X_0))$.

Remarque : Ainsi, la surface $X \mapsto f(X)$ est au-dessus de son plan tangent en X_0 .

e) Montrer que f est convexe, c'est-à-dire $\forall t \in [0, 1], f((1-t)X + tY) \leq (1-t)f(X) + tf(Y)$.