

TD n°17 bis. Corrigé

Exercice A. Posons $C = AB$.

1) On a $\forall i, \sum_{k=1}^n |c_{ik}| \leq \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij} b_{jk}| = \sum_{j=1}^n |a_{ij}| (\sum_{k=1}^n |b_{jk}|) \leq \sum_{j=1}^n |a_{ij}| N(B) \leq N(A)N(B)$.

Donc $N(C) \leq N(A)N(B)$.

2) On a $N(C)^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} \right)^2$.

Par Cauchy-Schwarz, $\left(\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} \right)^2 \leq \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_{jk}^2 \right)$.

On obtient $N(C)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n b_{lk}^2 \right) = N(A)^2 N(B)^2$.

3) a) - On vérifie d'abord que $\|AX\|_1 \leq N(A) \|X\|_1$. En effet, en posant $Y = AX$, on a :

$$\|Y\|_1 = \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \leq \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right) |x_j| \leq \sum_{j=1}^n N(A) |x_j| = N(A) \|X\|_1.$$

- On cherche un vecteur non nul pour lequel il y a égalité : Il existe j tel que $N(A) = \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$.

On considère le vecteur $X = E_j$ (vecteur canonique) : On a $\|E_j\|_1 = 1$ et $\|AE_j\|_1 = \|A_j\|_1 = \sum_{i=1}^n |a_{ij}| = N(A)$.

b) On a $\|ABX\|_1 \leq N(A) \|BX\|_1 \leq N(A)N(B) \|X\|_1$, donc $\|AB\|_1 \leq N(A)N(B)$.

Exercice B. Classes de similitude

Cas I : $\Delta_A = \{\lambda I_2\}$ est fermée et bornée.

Cas II : $\begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \Delta_A$ pour tout $\alpha \neq 0$, donc Δ_A n'est pas bornée.

Et $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \notin \Delta_A$, donc Δ_A n'est pas fermée.

Cas III : $M \in \Delta_A$ ssi son polynôme caractéristique admet λ et μ comme racines (il est alors scindé à racines simples), donc ssi $\text{tr } M = \lambda + \mu$ et $\det M = \lambda\mu$.

En particulier, $\begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \in \Delta_A$ pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$. Donc Δ_A n'est pas bornée (on fait tendre $\alpha \rightarrow +\infty$).

D'autre part, les relations $\text{tr } M = \lambda + \mu$ et $\det M = \lambda\mu$ sont stables par passage à la limite (car tr et $\det$ sont continues), donc Δ_A est fermée.

Exercice C. Suites des puissances d'une matrice

1) a) Comme λI_n et N commutent, on peut appliquer la formule du binôme.

Donc $T^k = \sum_{j=0}^n \binom{k}{j} \lambda^{k-j} N^j$. Comme N est nilpotente, on a $N^j = O_n$ pour tout $j \geq n$.

On obtient $T^k = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{k}{j} \lambda^{k-j} N^j$. Par l'inégalité triangulaire, $\|T^k\|_\infty \leq \sum_{j=0}^{n-1} \binom{k}{j} r^{k-j} \|N^j\|_\infty$.

b) Pour tout j fixé, on a $\binom{k}{j} \sim \frac{k^j}{j!}$ lorsque k tend vers $+\infty$.

Donc $\|T^k\| \leq r^k \beta_k$, avec $\beta_k = O(k^n)$ (car une somme finie de $O(k^n)$ est en $O(k^n)$).

Comme $r < 1$, on a donc $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|T^k\|_\infty = 0$, c'est-à-dire $\lim_{k \rightarrow +\infty} T^k = O_p$.

c) On vérifie par récurrence que les coefficients $a_{ij}^{(k)}$ de A^k vérifient $|a_{ij}^{(k)}| \leq t_{ij}^{(k)}$.

La propriété est vraie pour $k = 1$, et on a $|a_{ij}^{(k+1)}| = \left| \sum_{l=1}^p a_{il}^{(k)} a_{lj} \right| \leq \sum_{l=1}^p |a_{il}^{(k)}| t_{lj} \leq \sum_{l=1}^p t_{il}^{(k)} t_{lj} = t_{ij}^{(k+1)}$.

Par pincement, on en déduit donc que $\lim_{k \rightarrow +\infty} A^k = O_p$.

2) La matrice A est semblable à une matrice B triangulaire supérieure et $\rho(A) = \rho(B)$.

Par 1), $\lim_{k \rightarrow +\infty} B^k = O_p$. Par a), $\lim_{k \rightarrow +\infty} A^k = O_p$.