

TD n°17 bis. Espaces vectoriels normés de matrices

Exercice A. Exemples de normes d'algèbre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n .

Pour $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose $N(A) = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$.

Montrer que $N(AB) \leq N(A)N(B)$.

2) On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique $(X | Y) = X^T Y$ et de la norme euclidienne associée $\| \cdot \|$.

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme euclidienne canonique $N(A) = \sqrt{\text{tr}(A^T A)} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2}$.

Montrer que $N(AB) \leq N(A)N(B)$.

3) Norme subordonnée à $\| \cdot \|_1$ (inspiré des concours Centrale et X)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n .

Pour tout vecteur $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{C}^n$, on pose $\|X\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$.

Pour $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose $N(A) = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| = \max_{1 \leq j \leq n} \|A_j\|_1$.

a) Montrer que $N(A) = \sup_{X \neq 0} \frac{\|AX\|_1}{\|X\|_1}$.

b) En déduire que $N(AB) \leq N(A)N(B)$.

Exercice B. Classes de similitude

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ une matrice d'ordre 2 à coefficients complexes.

On considère trois cas :

Cas I : $A = \lambda I_2$; Cas II : $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$; Cas III : $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ avec $\lambda \neq \mu$.

On note Δ_A la classe de similitude de A , c'est-à-dire : $M \in \Delta_A$ ssi $\exists P \in GL_2(\mathbb{C}), M = P^{-1}AP$.

Déterminer dans chaque cas si Δ_A est une partie fermée (respectivement bornée) de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

Exercice C. Suites des puissances d'une matrice

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose $\rho(A) = \sup\{|\lambda|, \lambda \in \text{Sp}(A)\}$ et $\|A\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} |a_{ij}|$.

Rappel : Si A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sont semblables, alors $\lim_{k \rightarrow +\infty} A^k = O_p$ ssi $\lim_{k \rightarrow +\infty} B^k = O_p$.

1) On suppose A triangulaire supérieure et $r = \rho(A)$. On suppose $\rho(A) < 1$.

On considère $T \in \mathcal{M}_n(K)$ triangulaire supérieure définie par $\begin{cases} \forall i, & t_{ii} = r \\ \forall i < j, & t_{ij} = |a_{ij}| \end{cases}$

a) On a $T = rI_n + N$, avec N nilpotente. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, \|T^k\|_\infty \leq \sum_{j=0}^{n-1} \binom{k}{j} r^{k-j} \|N^j\|_\infty$.

b) Montrer que $\lim_{k \rightarrow +\infty} T^k = O_p$.

c) En déduire que $\lim_{k \rightarrow +\infty} A^k = O_p$.

2) On revient au cas général. Montrer que si $\rho(A) < 1$, alors $\lim_{k \rightarrow +\infty} A^k = O_p$.