

Exercice A. Normes sur $\mathbb{R}^2$

Remarque : En toute rigueur, on devrait noter $N((x, y))$ et non $N(x, y)$.

1) On a $N(x, y) = 0$ et $N(x, y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ y - 2x = 0 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (0, 0)$

On a $N(\lambda(x, y)) = N(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| N(x, y)$.

On a $N((x, y) + (x', y')) = \max(|(x + x') + (y + y')|, |(y + y') - 2(x + x')|)$.

On a $|(x + x') + (y + y')| \leq |x + y| + |x' + y'|$ et $|(y + y') - 2(x + x')| \leq |y - 2x| + |y' - 2x'|$.

On conclut avec $\max(\alpha + \alpha', \beta + \beta') \leq \max(\alpha, \beta) + \max(\alpha', \beta') = M$, car $\alpha + \alpha' \leq M$ et $\beta + \beta' \leq M$.

2) La boule unité est le parallélogramme délimité par les droites $x + y = \pm 1$ et $y - 2x = \pm 1$.

3) Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $M(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} = \|(x, y)\|_2$ norme euclidienne.

Exercice B. Normes de fonctions

1) - Il est nécessaire que φ soit positive.

Sinon, on pourrait trouver une fonction continue f telle que $\int_0^1 |f| \varphi < 0$.

En effet, il existe alors par continuité un intervalle $[a, b]$ non trivial tel que $\forall x \in]a, b[, \varphi(x) < 0$.

On considère une fonction f non identiquement nulle à support dans $[a, b]$.

On a alors $\int_0^1 |f| \varphi = \int_a^b |f| \varphi < 0$, ce qui contredit $N(f) \geq 0$.

- Supposons $\varphi \geq 0$. La seule propriété non nécessairement vérifiée est : $N(f) = 0 \Rightarrow f = 0$.

Posons $\Delta = \{x \in [0, 1] \mid \varphi(x) = 0\}$ et son complémentaire $A = \{x \in [0, 1] \mid \varphi(x) > 0\}$

L'ensemble Δ est une partie fermée de $[0, 1]$. On a $N(f) = 0$ ssi $\forall x \in A, f(x) = 0$.

On en déduit que N est une norme ssi A est dense dans $[0, 1]$, c'est-à-dire Δ d'intérieur vide.

Exemple : La propriété est vérifiée par exemple si φ admet un nombre fini ou dénombrable de zéros.

2) a) Il existe $m = \inf_{[0,1]} \frac{\varphi}{\psi} > 0$ et $M = \sup_{[0,1]} \frac{\varphi}{\psi}$. On a $mN_\psi(x) \leq N_\varphi(x) \leq MN_\psi(x)$.

b) On a $N_1(f_n) \sim \int_0^{+\infty} t e^{-nt} dt = \frac{1}{n}$ et $N_2(f_n) \sim \int_0^{+\infty} t^2 e^{-nt} dt = \frac{2}{n^2}$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{N_1(f_n)}{N_2(f_n)} = +\infty$.

Exercice C. Normes de $\mathbb{R}^n$ définies par un compact convexe

1) a) Comme les normes sont équivalentes, la notion d'intérieur ne dépend pas du choix de la norme.

Il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x, \alpha N(x) \leq \|x\|$, donc B contient tous les vecteurs vérifiant $\|x\| < \alpha$.

b) Soit $\lambda \in]0, 1[$. Soient x et $y \in B$.

On a $\|\lambda x + (1 - \lambda)y\|^2 = \lambda^2 \|x\|^2 + 2\lambda(1 - \lambda) \langle x, y \rangle + (1 - \lambda)^2 \|y\|^2 \leq \lambda^2 + 2\lambda(1 - \lambda) + (1 - \lambda)^2 = 1$.

Pour avoir l'égalité, il faut $\|x\| = \langle x, y \rangle = \|y\| = 1$, donc $x = y$ (cf cas d'égalité dans Cauchy-Schwarz).

On en conclut que si x et y sont distincts, $\|\lambda x + (1 - \lambda)y\| < 1$.

2) On note $\| \cdot \|$ la norme euclidienne canonique.

a) Comme K n'est pas d'intérieur non vide, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(0, \varepsilon) \subset K$.

Ainsi, pour λ assez grand $\frac{\|x\|}{\lambda} \leq \varepsilon$, donc $\left\{ \lambda \in \mathbb{R}_+^* \mid \frac{x}{\lambda} \in K \right\}$ n'est pas vide. Donc $N(x)$ est défini.

b) On a bien $N(x) \geq 0$. Supposons x non nul.

Comme K est borné, il existe M tel que $K \subset B(0, M)$.

Ainsi, $\forall \lambda > 0, \frac{x}{\lambda} \in K \Rightarrow \frac{\|x\|}{\lambda} \leq M \Rightarrow \lambda \geq \frac{M}{\|x\|}$. Donc $N(x) \geq \frac{M}{\|x\|} > 0$.

Il existe une suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\frac{x}{\lambda_n} \in K$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n = N(x)$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x}{\lambda_n} = \frac{x}{N(x)}$ et que K est fermé, alors $\frac{x}{N(x)} \in K$, donc $N(x) = \min \left\{ \lambda \in \mathbb{R}_+^* \mid \frac{x}{\lambda} \in K \right\}$.

c) - Par les propriétés de la borne inférieure, on a $N(\mu x) = |\mu| N(x)$.

Remarque : Pour le prouver, il suffit de justifier $N(\mu x) \geq |\mu| N(x)$, puis de considérer $\mu^{-1}x$ (si $\mu \neq 0$).

- Montrons l'inégalité triangulaire : Soient x et $y \in \mathbb{R}^n$. Montrons $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$.

On peut supposer x et y non nuls. On pose $\lambda = N(x)$ et $\mu = N(y)$.

On a $\frac{x+y}{\lambda+\mu} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \frac{x}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda+\mu} \frac{y}{\mu}$ barycentre de $\frac{x}{\lambda}$ et $\frac{y}{\mu}$ à coefficients (strictement) positifs.

Donc $\frac{x+y}{\lambda+\mu}$ appartient au segment $\left[\frac{x}{\lambda}, \frac{y}{\mu} \right]$. comme K est convexe, $\frac{x+y}{\lambda+\mu} \in K$.

Donc $\lambda + \mu \geq N(x+y)$, ce qu'il fallait prouver.

d) Montrons que K est bien la boule unité pour la norme N . On a $N(x) \leq 1$ ssi $1 \in \Delta(\lambda)$, donc ssi $\frac{x}{1} \in K$.