

## TD n°17. Espaces vectoriels normés

### Exercice A. Exemple de norme sur $\mathbb{R}^2$

On considère dans  $\mathbb{R}^2$  l'application  $N(x, y) = \max(|x + y|, |y - 2x|)$ .

- 1) Montrer brièvement que  $N$  est une norme.
- 2) Représenter la boule unité.
- 3) Que dire de la norme  $M(x, y) = \sup_{\theta \in \mathbb{R}} |(\cos \theta)x + (\sin \theta)y|$  ?

### Exercice B. Exemple norme de fonctions

- 1) Pour  $f \in E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$ , on considère  $N_\varphi(f) = \int_0^1 |f(t)| \varphi(t) dt$ , où  $\varphi \in E$ .

Donner une CNS sur  $\varphi$  pour que  $N$  soit une norme sur  $E$ .

- 2) a) On suppose  $\varphi$  et  $\psi \in E$  strictement positives. Montrer que  $N_\varphi$  et  $N_\psi$  sont équivalentes.

b) On prend  $N_1(f) = \int_0^1 |f(t)| t dt$  et  $N_2(f) = \int_0^1 |f(t)| t^2 dt$ .

En considérant  $f_n(t) = e^{-nt}$ , montrer que  $N_1$  et  $N_2$  ne sont pas équivalentes.

### Exercice C. Norme de $\mathbb{R}^n$ définie par un compact convexe

- 1) Soit  $N$  une norme sur  $\mathbb{R}^n$ .

a) On sait que la boule unité  $B$  de  $N$  est convexe, compacte, symétrique.

Justifier que l'intérieur de  $B$  (pour la norme euclidienne  $\| \cdot \|$ ) contient  $\vec{0}$ .

b) On considère dans cette question  $\mathbb{R}^n$  muni de la norme euclidienne (canonique) qu'on note  $\| \cdot \|$ .

Montrer que  $B$  est strictement convexe :  $\forall (x, y) \in B^2, x \neq y \Rightarrow \forall \lambda \in ]0, 1[, \| \lambda x + (1 - \lambda)y \| < 1$ .

- 2) Soit  $K$  un convexe de  $\mathbb{R}^n$  compact, symétrique, contenant 0 dans son intérieur.

*Terminologie* :  $K$  compact signifie que  $K$  est borné et fermé.

On se propose de construire une norme  $N$  dont  $K$  est la boule unité.

On pose  $N(x) = \inf(\Delta_x)$ , où  $\Delta_x = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}_+^* \mid \frac{x}{\lambda} \in K \right\}$ .

a) Montrer que  $N(x)$  est bien défini pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ .

b) Soit  $x \in \mathbb{R}^n$  non nul. Montrer que  $N(x) > 0$ , que  $N(x) = \min(\Delta_x)$  et que  $\Delta_x = [N(x), +\infty[$ .

c) Montrer que  $N$  est une norme.

*Indication* : Pour l'inégalité triangulaire, utiliser  $\frac{x+y}{\lambda+\mu} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \frac{x}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda+\mu} \frac{y}{\mu}$ .

d) Montrer que  $K$  est bien la boule unité (fermée) de  $N$ .