

TD n°16. Corrigé

1) a) Pour tout $\rho > 0$, $(e^n \rho^{(n^2)})_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée ssi $\rho < 1$, donc $R = 1$.

b) On a $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} = \exp\left(n^2 \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) = \exp\left(n - \frac{1}{2} + o(1)\right) \sim \frac{1}{\sqrt{e}} e^n$. Donc $R = e^{-1}$.

2) Pour $\rho \in]0, R[$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \rho^n = 0$ (car $\sum a_n \rho^n$ cv), donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n \rho^n = \infty$, d'où $R' \leq \rho^{-1}$.

En faisant tendre ρ vers R , on obtient $R' \leq R^{-1}$, c'est-à-dire $RR' \leq 1$.

L'inégalité peut être stricte : Par exemple, avec $a_n = 2^n$ si n est pair, et 1 sinon, on a $R = \frac{1}{2}$ et $R' = 1$.

3) a) La série de fonctions $\sum (-1)^n x^{pn+r-1}$ converge normalement vers $\frac{x^{r-1}}{1+x^p}$ sur tout segment $[0, a]$, où $a < 1$.

On a donc $\int_0^x \frac{t^{r-1}}{1+t^p} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x (-1)^n t^{pn+r-1} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{pn+r}}{pn+r}$.

La série de fonctions $\sum \frac{(-1)^n x^{pn+r}}{pn+r}$ cv uniformément sur $[0, 1]$. Donc $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{pn+r}}{pn+r}$ est continue.

En faisant tendre x vers 1^- , on obtient bien $\int_0^1 \frac{x^{r-1}}{1+x^p} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{pn+r}$.

b) On a $A = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$.

Comme $\frac{1}{(4n+1)(4n+3)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4n+1} - \frac{1}{4n+3} \right)$, alors $B = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{1}{2} \arctan(1) = \frac{\pi}{8}$.

4) On choisit $a \in E$.

Une partition est entièrement déterminée par le choix de A contenant a et d'une partition de $E \setminus A$.

La partie A s'écrit de façon unique $A = B \sqcup \{a\}$, où B est une partie arbitraire de $F = E \setminus \{a\}$.

Donc $S_{n+1} = \sum_{B \subset F} S_{n-\text{card } B} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} S_{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{n-k} S_k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} S_k$.

5) On a $a_0 = S_0 = 1$. On vérifie par récurrence forte que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq a_n \leq 1$.

En effet, si la propriété est vraie pour tout $0 \leq k \leq n$, on a $a_{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n 1 = 1$.

Donc la série entière $\sum a_n x^n$ est de rayon de convergence $R \geq 1$.

6) Soit $x \in]-R, R[$. On a $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{(n-k)!} x^n$.

On reconnaît le produit de Cauchy des séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum \frac{1}{n!} x^n$ (bien définies pour x).

On obtient donc $f'(x) = f(x) \exp(x)$.

D'où $f(x) = K \exp(\exp(x))$, et comme $f(0) = a_0 = 1$, alors $f(x) = e^{-1} \exp(\exp(x))$.

7) On a donc $f(x) = e^{-1} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\exp(px)}{p!} = e^{-1} \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(px)^n}{p!n!}$.

Comme tous les termes sont positifs, la famille $\left(\frac{(px)^n}{p!n!} \right)_{(p,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ est sommable.

Par Fubini, on a donc $\forall x \in]-R, R[$, $f(x) = e^{-1} \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(px)^n}{p!n!}$.

Comme la fonction série entière définit entièrement les coefficients de la série, on obtient :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = e^{-1} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{p^n}{p!n!}$. Donc $S_n = e^{-1} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{p^n}{p!}$.

8) Comme $\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{2}(e-1) \leq 1$, on montre par récurrence forte que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq a_n \leq 1$. Donc $R \geq 1$.

9) On considère le produit de Cauchy de $\sum a_n z^n$ et de $\sum \frac{1}{n!} z^n$.

Donc pour $|z| < R$, $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right) e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} a_{n-k}\right) z^n = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-a_n) z^n = 2a_0 - \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)$.

10) On a $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{i} \frac{e^{ix/2} - e^{-ix/2}}{e^{ix/2} + e^{-ix/2}} = \frac{1}{i} \frac{e^{ix} - 1}{e^{ix} + 1} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i} \frac{2}{e^{ix} + 1}$.

Donc $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \operatorname{Re}\left(-\frac{1}{i} \frac{2}{e^{ix} + 1}\right) = -\operatorname{Im}\left(\frac{2}{1 + e^{ix}}\right)$.

Or, $\frac{2}{1 + e^{ix}} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (ix)^n$. donc $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^{k+1} a_{2k+1} x^{2k+1}$, car $-i^{2k+1} = (-1)^{k+1} i$.