

TD n°16. Séries entières.

Exercice A. Calculs de rayons de convergence

- 1) a) Déterminer le rayon de convergence de $\sum e^n z^{(n^2)}$.
b) Déterminer le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$, avec $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$.
2) Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in \mathbb{R}_+^*$. On pose $b_n = \frac{1}{a_n}$, et R' le rayon de $\sum b_n z^n$.
a) Montrer que $RR' \leq 1$. *Indication* : Noter d'abord que pour tout $\rho \in]0, R[$, $(a_n \rho^n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0.
b) Donner un exemple où $RR' < 1$.

Exercice B. Calculs de sommes utilisant les séries entières

- 3) a) Soient p et $r \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(pn+r)} = \int_0^1 \frac{x^{r-1}}{1+x^p} dx$.
b) Déterminer $A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)}$, et en déduire $B = \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{5 \times 7} + \frac{1}{9 \times 11} + \dots$

Exercice C. Série génératrice des partitions

On considère S_n le nombre de partitions de $E = \llbracket 1, n \rrbracket$.

Remarque : une partition de E est un ensemble de parties disjointes non vides dont la réunion est E .

- 4) On a $S_0 = 1$. Montrer que $S_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} S_k$.

Indication : Considérer la partie A de la partition contenant un élément $a \in E$ fixé.

- 5) On pose $a_n = \frac{S_n}{n!}$. On obtient donc $(n+1)a_{n+1} = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{(n-k)!}$.

Montrer que la série entière $\sum a_n x^n$ est de rayon de convergence $R > 0$.

- 6) On pose $\forall x \in]-R, R[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

En utilisant une équation différentielle, montrer que $f(x) = e^{-1} \exp(\exp(x))$.

- 7) En utilisant le théorème de Fubini, montrer la formule de Dobinsky : $S_n = e^{-1} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{p^n}{p!}$.

Exercice D. Développement en série entière de la fonction tangente

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $a_0 = 1$, et $\forall n \geq 1$, $a_n + \sum_{k=0}^n \frac{a_{n-k}}{k!} = 0$, c'est-à-dire $a_n = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{a_{n-k}}{k!}$.

- 8) Montrer que le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n z^n$ vérifie $R \geq 1$.

- 9) Montrer que pour $|z| < R$, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \frac{2}{1+e^z}$.

- 10) En déduire que $\forall x \in]-R, R[$, $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^{k+1} a_{2k+1} x^{2k+1}$.

Remarque cuturelle : En fait, on peut montrer (par une autre méthode) que $\tan$ est DSE sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.