**TD n°16. Corrigé**

**Exercice A**

**1)** Comme $D$ est compact, $f$ est bornée et atteint ses bornes. On a $\inf f \leq 0 \leq \sup f$.

Si $\sup f > 0$, alors il existe $X_0 \in U$ tel que $f(X_0) = \sup f$ (car $f$ est nulle sur $C$). Comme $U$ est ouvert et $f$ différentiable en $X_0$, alors $\overrightarrow{\nabla} f(X) = \overrightarrow{0}$. Si $\inf f < 0$, on se ramène au cas précédent en considérant $-f$.

Sinon, on a $\inf f = 0 = \sup f$, donc $f$ est identiquement nulle, et tout $X \in U$ convient.

**2)** a) Montrons par pincement que $f(X)$ converge vers 0 lorsque $X = (x, y)$ converge vers $(0, 0)$.

On note que $0 \leq f(X) \leq \dfrac{xy}{x+y}$. Il y a plusieurs preuves pour cbnclure selon le choix de la norme :

On a $0 \leq f(X) \leq \dfrac{\|X\|_1^2}{\|X\|_1} = \|X\|_1$ ; On a $0 \leq f(X) \leq \dfrac{xy}{\max(x,y)} \leq \min(x, y) \leq \|X\|_\infty$.

On a aussi $x + y = \langle X, Z\rangle$, avec $Z = (1, 1)$, donc $x + y = \|X\|_2 \|Z\|_2 \cos(X, Z) \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \|X\|_2 \|Z\|_2 \geq \|X\|_2$.

En effet, comme $X$ est à coordonnées positives, l'angle $(X, Z)$ est compris entre $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$.

On a donc $0 \leq f(X) \leq \|X\|$, et par pincement, $f(X)$ converge vers $(0, 0)$ lorsque $X$ tend vers $(0, 0)$.

b) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$. On a $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \left(\dfrac{1}{x(1+x)} - \dfrac{1}{x+y}\right) f(x, y)$ et $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \left(\dfrac{1}{y(1+y)} - \dfrac{1}{x+y}\right) f(x, y)$.

Si $\nabla f(x, y) = \overrightarrow{0}$, alors $x(1 + x) = y(1 + y)$,

donc nécessairement $x = y$, car $\varphi : t \longmapsto t(1 + t)$ est injective (strictement croissante) sur $\mathbb{R}_+^*$.

Donc $\nabla f(x, y) = \overrightarrow{0}$ ssi $x = y$ et $x(1 + x) = 2x$, donc ssi $(x, y) = (1, 1)$.

c) Considérons $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \text{ et } y \geq 0 \text{ et } x + y \leq 8\}$. Le compact $K$ contient $A = (1, 1)$.

$K$ est un compact (triangle) et $\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, $(x, y) \notin K \Rightarrow f(x, y) \leq \dfrac{1}{x+y} \leq \dfrac{1}{8} = f(A) \leq \sup_K f$.

Donc $\sup_K f$ majore $f$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, et comme $K$ est compact, $\sup f = \sup_K f$ est atteint.

Comme $f$ est nulle pour $x = 0$ ou $y = 0$, alors $\sup f$ est atteint à l'intérieur du domaine, donc en un point critique.

Par b), on en conclut que $\sup f = f(A) = \dfrac{1}{8}$.

**Exercice B**

**1)** Par le cours, $H_f(a, b) \in S_2^-(\mathbb{R})$, donc ses valeurs propres $\lambda$ et $\mu$ sont $\leq 0$.

A fortiori, on a $\Delta f(a, b) = \mathrm{tr}(H_f(a, b)) = \lambda + \mu \leq 0$.

**2)** Supposons que $f$ n'est pas négative sur $D$ : elle prend au moins une valeur strictement positive. Comme $D$ est compact, $f$ atteint son maximum, et on a $\max f > 0$. Donc $f$ atteint son maximum en un point intérieur à $D$, et par 1), le laplacien en ce point est négatif. D'où une contradiction avec l'hypothèse $\Delta f > 0$ sur $U$.

*Exemple :* $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$..On a $\Delta f(x, y) = 4$.

**3)** Soit $\varepsilon > 0$. On considère $g(x, y) = f(x, y) + \varepsilon(x^2 + y^2 - 1)$. On a $\Delta g(x, y) = \Delta f(x, y) + 4\varepsilon > 0$ sur $V$.

De plus, $g$ est nulle sur $C$. Par 3), $g$ est négative sur $D$, donc $f(x, y) \leq \varepsilon(1 - x^2 - y^2)$ sur $D$.

En faisant tendre $\varepsilon$ vers $0^+$, on obtient $f(x, y) \leq 0$ sur $D$.

**4)** On a $\Delta(f_1 - f_2) = 0$. Par 4) appliqué à $f_1 - f_2$, on obtient $f_1 - f_2 \leq 0$ sur $V$.

En inversant les rôles de $f_1$ et $f_2$, on obtient $f_1 = f_2$ sur $U$.