TD n°16. Fonctions de plusieurs variables

Exercice A. Extrema

1) *Théorème de Rolle en dimension 2.*

Soit D le disque unité de $\mathbb{R}^2$, et U l'intérieur de D (c'est-à-dire le disque unité ouvert).

Soit $f : D \to \mathbb{R} \quad X \longmapsto f(X)$ continue, et de classe C^1 sur U. On note $\overrightarrow{\nabla} f(X)$ le gradient de f en X.

On suppose que f est nulle sur le cercle unité. Montrer qu'il existe $X \in U$ tel que $\overrightarrow{\nabla} f(X) = \overrightarrow{0}$.

Indication : Considérer les extrema de f sur le compact D.

2) On considère $f : (\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+) \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R} \ (x,y) \longmapsto \dfrac{xy}{(1+x)(1+y)(x+y)}$.

a) Montrer que f se prolonge par continuité en $(0,0)$.

b) Montrer que $(1,1)$ est l'unique point critique de f sur $]0,+\infty[^2$.

Indication : Noter que $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} / f(x,y) = \dfrac{1}{x(1+x)} - \dfrac{1}{x+y}$. En déduire que tout point critique est sur l'axe $y = x$.

c) Déterminer $\sup f$.

Indication : On a $f(x,y) \leq \dfrac{1}{x+y}$. Et, $f(1,1) = \frac{1}{8}$. D'où $\sup f = \sup_K f$, où $K = \{(x,y) \mid x+y \leq 8,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$.

Exercice B. Unicité au problème de Dirichlet : $\Delta f = g$

On note D le disque unité de $\mathbb{R}^2$, C le cercle unité, et U le disque unité ouvert (c'est-à-dire l'intérieur de D).

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ continue sur D et de classe C^2 sur U. On définit sur U le laplacien de f par : $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

1) On suppose que f admet en $(a,b) \in U$ un maximum local. Montrer que $\Delta f(a,b) \leq 0$.

2) On suppose que $\Delta f > 0$ sur U, et que f est identiquement nulle sur le cercle unité C.

En raisonnant par l'absurde, montrer que f est négative sur D.

Donner sans justification un exemple d'une telle fonction, strictement négative sur U.

3) Démontrer que 2) reste vrai si on suppose seulement $\Delta f \geq 0$ au lieu de $\Delta f > 0$.

Indication : Considérer, pour $\varepsilon > 0$, la fonction $g(x,y) = f(x,y) + \varepsilon(x^2 + y^2 - 1)$.

4) Soient f_1 et f_2 continues sur D coïncidant sur C et telles que $\Delta f_1 = \Delta f_2$ sur U. Que peut-on dire de f_1 et f_2 ?