

TD n°15. Suites et séries de fonctions

1) a) On considère $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \sin(2^n x)$. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

b) Trouver une relation entre $f(x)$ et $f(2x)$. En déduire (par l'absurde) que f n'est pas dérivable en 0.

2) a) On considère $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1 + x^n)$. Montrer que f est continue sur $[0, 1[$.

La convergence est-elle normale sur $[0, 1[$?

b) Trouver un équivalent de $f(x)$ lorsque x tend vers 1^- .

3) On considère $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \exp(-n^2 x)$. Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$.

4) (*Oral Mines*) Soit $f_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue. On définit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t) dt$.

Montrer (en majorant à l'aide de $M_0 = \sup_{[-a, a]} |f_0|$) que $\sum f_n$ converge normalement sur $[-a, a]$.

Trouver une équation différentielle vérifiée par $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

5) On considère $S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$, avec f_n positives et croissantes sur $[0, 1[$. On pose $\lambda_n = \lim_{t \rightarrow 1} f_n(t)$.

a) On suppose $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n < +\infty$. Montrer que $\lim_{t \rightarrow 1, t < 1} S(t)$ vaut $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n$.

b) On suppose $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n = +\infty$. Montrer que $\lim_{t \rightarrow 1, t < 1} S(t) = +\infty$.

Indication : Montrer que $\forall p \in \mathbb{N}, \sum_{n=0}^p \lambda_n \leq \lim_{t \rightarrow 1, t < 1} S(t)$.

c) *Exemple* : Soit X une v.a. entière et $G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$.

On a $\forall t \in [0, 1[, \frac{G_X(1) - G_X(t)}{1 - t} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{1 - t^n}{1 - t} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (1 + t + t^2 + \dots + t^{n-1})$.

Montrer que X est d'espérance finie ssi G_X est dérivable en 1, et que $G'_X(1) = E(X)$.

6) Soit une suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes de degré $\leq d$ convergeant simplement sur $[0, 1]$ vers une fonction f .

Montrer que f est une fonction polynôme de degré $\leq d$, et montrer que la convergence est uniforme.

Indication : Utiliser les polynômes de Lagrange en $(d + 1)$ points fixés $(x_k)_{0 \leq k \leq d}$ de $[0, 1]$.

7) a) Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions convergeant simplement vers f sur I .

Soit E une partie finie de I . La convergence de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle uniforme sur E ?

b) (★) Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions 1-lipschitziennes convergeant simplement vers f sur $[0, 1]$

Montrer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément.

Indication : La convergence est uniforme sur $E_p = \left\{ \frac{k}{p}, k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket \right\}$.

On a aussi $\forall n \in \mathbb{N}, |f_n(x) - f_n(y)| \leq |x - y|$, et par passage à la limite, $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$.

On choisit p tel que $\frac{1}{p} \leq \varepsilon$. Montrer que pour n assez grand, $\forall x \in [0, 1], |f_n(x) - f(x)| \leq 3\varepsilon$.