TD n°15. Fonctions de plusieurs variables. Corrigé.

Exercice A

On a $\forall j$, $f(A) = \sum_{i=1}^n a_{ij}C_{ij}$, donc $\dfrac{\partial f}{\partial a_{ij}}(A) = C_{ij}$, car les autres C_{kj} ne dépendent pas de a_{ij}.

Donc $\nabla f(A)$ est le vecteur de $\mathbb{R}^{(n^2)}$ dont les coefficients sont les C_{ij}.

Exercice B

1) En dérivant (E), par rapport à x, on obtient $t\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(t\overrightarrow{x}) = t^\alpha f(\overrightarrow{x})$, d'où $\dfrac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) = t^{\alpha-1}f(x, y)$.

2) En dérivant (E) par rapport à t, on obtient : $\overrightarrow{x}.\nabla f(t\overrightarrow{x}) = \alpha t^{\alpha-1}f(\overrightarrow{x})$, d'où le résultat avec $t = 1$.

Réciproquement, supposons $\overrightarrow{x}.\nabla f(\overrightarrow{x}) = \alpha f(\overrightarrow{x})$. Alors $t\overrightarrow{x}.\nabla f(t\overrightarrow{x}) = \alpha f(t\overrightarrow{x})$.

Donc $tg'(t) = \alpha g(t)$ pour tout $t > 0$, d'où $g(t) = kt^\alpha$ pour tout $t > 0$.

Comme $k = g(1) = f(\overrightarrow{x})$, on obtient $g(t) = t^\alpha f(\overrightarrow{x})$, d'où le résultat.

Exercice C

1) a) Comme X et Y sont bornées, X et Y sont d'espérances finies, ainsi que $X + Y$.

Comme f est bornée sur tout segment, $f(X + Y)$ est d'espérance finie.

On prend $\mu = E(X)$. Par a), on a $f(X) \geq f(\mu) + f'(\mu)(X - \mu)$.

En passant aux espérances, on obtient $f(X) \geq f(\mu) + 0 = f(\mu) = f(E(X))$.

b) $f(X + Y) \geq f(X) + f'(X)Y$ donc $E(f(X + Y)) \geq E(f(X)) + E(f'(X)Y)$.

Comme X et Y sont indépendantes, alors $E(f'(X)Y) = E(f'(X))E(Y) = 0$.

Donc $E(f(X + Y)) \geq E(f(X))$.

2) a) $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j s_{ij} = (X \mid SX) \geq 0$.

b) On a $g'(t) = \sum_{i=1}^n x_i \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, ..., tx_n)$.

Donc $g''(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(tx_1, ..., tx_n) = X^T SX$, où $S = H_f(tX)$. Donc $g''(t) \geq 0$.

c) Par 1) a), $g(t) \geq g(0) + tg'(0)$. Pour $t = 1$, on obtient $g(1) \geq g(0) + g'(0)$.

Donc $f(X) \geq f(0) + \sum_{i=1}^n x_i \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\overrightarrow{0}) = f(0) + (X \mid \operatorname{grad} f(0))$.

d) On applique c) à la fonction $F(X) = f(X + X_0)$. On a notamment $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X_0)$.

e) On procède comme au c) et d) en utilisant une fonction partielle : $g(t) = f(X + t(Y - X))$.

On a $g''(t) = (Y - X)^T\ S\ (Y - X) \geq 0$, où $S = H_f(X + t(Y - X))$.

Donc g est convexe, et ainsi $\forall t \in [0, 1]$, $g(t) = g((1 - t)\ 0 + t\ 1) \leq (1 - t)g(0) + tg(1)$, d'où le résultat.