

TD n°14. Probabilités. Corrigé

1) a) $N_k = \sum_{j=1}^n 1_{X_j=k}$, donc N_k suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p_i)$.

b) On a $E(N_k) = np_k$ et $V(N_k) = n(p_k - p_k^2)$.

Et si $k \neq l$, $E(N_k N_l) = \sum_{1 \leq i \leq n} \sum_{1 \leq j \leq n} E(1_{X_i=k} 1_{X_j=l}) = n(n-1)p_k p_l$. Donc $\text{Cov}(N_k, N_l) = -np_k p_l$.

2) On a $P(V > j) = \left(1 - \frac{j}{n}\right)^2$, donc $E(V) = \sum_{j=0}^n \left(1 - \frac{j}{n}\right)^2 = \sum_{j=0}^n \left(\frac{k}{n}\right)^2$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(D) = \frac{1}{3}$.

On a $W = (n+1) - \min(X', Y')$, où $X' = n+1 - X$ et $Y' = n+1 - Y$ qui sont i.i.d. de loi uniforme.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} E(W) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

On pose $V = \min(X, Y)$, $W = \max(X, Y)$ et $D = |X - Y|$. Calculer $E(V)$ et $E(W)$, la loi de D et $E(D)$.

On a $D = W - V$, donc par linéarité de l'espérance, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} E(D) = \frac{1}{3}$.

On a $P(D = 0) = P(X = Y) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{n}$.

Pour $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $P(D = k) = \sum_{j=1}^{n-k} P(X = k, Y = j+k) + \sum_{j=1}^{n-k} P(X = j+k, Y = k)$.

Donc $P(D = k) = 2 \sum_{j=1}^{n-k} \left(\frac{1}{n}\right)^2 = 2 \sum_{j=1}^{n-k} \frac{n-k}{n}$.

3) On sait que $X + Y$ suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda + \mu)$.

$P((X, Y) = (k, n-k) \mid X + Y = n) = \frac{P(X = k, Y = n-k)}{P(X + Y = n)} = \frac{\lambda^k}{k!} \frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!} e^{-(\lambda+\mu)} \frac{n!}{(\lambda + \mu)^n} e^{(\lambda+\mu)} = \binom{n}{k} \frac{\lambda^k \mu^{n-k}}{(\lambda + \mu)^n}$.

Il s'agit donc la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, avec $p = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$ (et $q = 1 - p = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$).

4) a) $f : t \mapsto e^{tx}$ est convexe, donc $f(t) \leq L(t)$ corde de f sur $[-1, 1]$.

On a $L(t) = e^{-t} + (t+1) \frac{e^t - e^{-t}}{2}$, donc $e^{tX} \leq e^{-t} + (X+1) \frac{e^t - e^{-t}}{2} = \text{ch } t + X \text{ sh } t$.

Donc $E(e^{tX}) \leq \text{ch } t \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$.

b) On a $\forall t > 0$, $P(S_n \geq s) = P(e^{tS_n} \geq e^{ts}) \leq \frac{E(e^{tS_n})}{e^{ts}} = \frac{E(e^{tX})^n}{e^{ts}} = \exp\left(n \frac{t^2}{2} - ts\right)$.

En prenant $t = \frac{s}{n}$, on obtient $P(S_n \geq s) \leq \exp\left(-\frac{s^2}{2n}\right)$.

5) a) $P(S = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(S = k \mid N = n) P(N = n)$.

Or, $P(S = k \mid N = n) = P(\sum_{i=1}^n X_i = k \mid N = n) = P(\sum_{i=1}^n X_i = k)$ car N indépendante des Z_k .

Donc $P(S = k \mid N = n) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ cf loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

Donc $P(S = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = \sum_{n=k}^{+\infty} p^k q^{n-k} \frac{\lambda^n}{k!(n-k)!} e^{-\lambda}$.

On conclut $P(S = k) = \frac{p^k \lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \sum_{n=k}^{+\infty} q^{n-k} \frac{\lambda^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{p^k \lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} q^j \frac{\lambda^j}{j!} = \frac{p^k \lambda^k}{k!} e^{-\lambda} e^{\lambda q} = \frac{(\lambda p)^j}{j!} e^{-\lambda p}$.

Donc X suit la loi $\mathcal{P}(\lambda p)$.

On a $T = \sum_{k=1}^N \overline{X_k}$, où les $\overline{X_k} = 1 - X_k$ sont des v.a. i.i.d. de Bernoulli de loi $\mathcal{B}(q)$ indépendantes de N .

Donc Y suit la loi $\mathcal{P}(\lambda q)$.

b) On a $P(S = k, T = j) = P(S = k, N = j+k) = P(S = k \mid N = j+k) P(N = j+k)$.

Par a), on obtient donc $P(S = k, T = j) = \binom{j+k}{k} p^k q^j \times \frac{\lambda^{j+k}}{(j+k)!} e^{-\lambda} = \frac{p^k \lambda^k}{k!} e^{-p\lambda} \times \frac{q^j \lambda^j}{j!} e^{-q\lambda}$.

On en déduit que $P(S = k, T = j) = P(S = k) P(T = j)$. Donc S et T sont indépendantes.

c) On a $G_N(t) = e^{\lambda(t-1)}$ et $G_X(t) = (q + pt)$, donc $G_S(t) = G_N(G_X(t)) = e^{\lambda((q+pt)-1)} = e^{p\lambda(t-1)}$.