

TD n°14. Probabilités

1) Soient $X_1, \dots, X_n$ des v.a. indépendantes et de même loi que X , à valeurs dans $\{1, 2, \dots, d\}$, où $d \in \mathbb{N}^*$.

Pour tout $k \in \{1, 2, \dots, d\}$, on pose $p_k = P(X = k)$ et $N_k = \text{card}\{j \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid X_j = k\}$.

a) Exprimer N_k comme somme de n variables de Bernoulli. En déduire la loi de N_k .

b) Pour tout $(k, l) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, calculer $\text{Cov}(N_k, N_l)$.

2) On considère X et Y deux v.a. de loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$.

On pose $V = \min(X, Y)$, $W = \max(X, Y)$ et $D = |X - Y|$.

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} E(V)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} E(W)$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} E(D)$ et la loi de D .

3) *Tranches de Poisson*

Soient X et Y des v.a. indépendantes avec $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$, avec λ et $\mu > 0$. On pose $p = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$.

Montrer que la loi conditionnelle de X sachant que $X + Y = n$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(p)$.

Commentaire : Intuitivement, considérons une succession de tops de type 1 et 2 avec un flux respectifs de λ et μ . La probabilité que le top suivant soit de type 1 vaut p . L'événement : "Le prochain top est de type 1" suit donc une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$. D'où la loi binomiale si on compte le nombre de tops de type 1 parmi les n premiers tops obtenus.

4) Soient $X_1, \dots, X_n$ des v.a. i.i.d. à valeurs dans $[-1, 1]$ de même loi que X , avec $E(X) = 0$.

a) Soit $t > 0$. Montrer que $E(e^{tX}) \leq \text{ch } t$. On en déduit (admis ici) que $E(e^{tX}) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$.

b) Soit $s > 0$. On pose $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Montrer que $P(S_n \geq s) \leq \exp\left(-\frac{s^2}{2n}\right)$.

5) *Petit Poisson*

Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Soit $S = \sum_{i=1}^N X_i$, où les X_i sont i.i.d. de loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, avec $0 < p < 1$.

On pose $T = N - S$. On suppose aussi N indépendante des X_i .

On suppose que N suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, c'est-à-dire $P(N = n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$.

a) Montrer que S suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda p)$. Que dire de la loi de T ?

b) Montrer que S et T sont indépendantes (non évident par construction).

Remarque : Lorsque N ne suit pas une loi de Poisson, S et T ne sont en général pas indépendantes.

c) *La formule de Wald* (pour les séries génératrices) assure que $G_S(t) = G_N(G_X(t))$.

En admettant la formule de Wald, retrouver le résultat du 1) a).