TD n°14. Espaces normés de matrices

Exercice A. Deux exemples de normes d'algèbre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n.

Pour $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose $\boxed{N(A) = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|}$.

Montrer que $N(AB) \leq N(A)N(B)$.

2) On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique $(X \mid Y) = X^T Y$ et de la norme euclidienne associée $\| \ \|$.

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme euclidienne canonique $N(A) = \sqrt{\mathrm{tr}(A^T A)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}$.

Montrer que $N(AB) \leq N(A)N(B)$.

Exercice B. Suites des puissances d'une matrice

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose $\boxed{\rho(A) = \sup\{|\lambda|, \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\}}$ et $\|A\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} |a_{ij}|$.

Rappel : Si A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sont semblables, alors $\lim_{k \to +\infty} A^k = O_p$ ssi $\lim_{k \to +\infty} B^k = O_p$.

1) On suppose A triangulaire supérieure et $r = \rho(A)$. On suppose $\boxed{\rho(A) < 1}$.

On considère $T \in \mathcal{M}_n(K)$ triangulaire supérieure définie par $\begin{cases} \forall i, \quad t_{ii} = r \\ \forall i < j, \quad t_{ij} = |a_{ij}| \end{cases}$

a) On a $T = rI_n + N$, avec N nilpotente. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\left\|T^k\right\|_\infty \leq \sum_{j=0}^{n-1} \binom{k}{j} r^{k-j} \left\|N^j\right\|_\infty$.

b) Montrer que $\lim_{k \to +\infty} T^k = O_p$.

c) En déduire que $\lim_{k \to +\infty} A^k = O_p$.

2) On revient au cas général. Montrer que si $\rho(A) < 1$, alors $\lim_{k \to +\infty} A^k = O_p$.

Exercice C : Cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire

On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme euclidienne et du produit scalaire canoniques. Soit $X : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ continue.

1) Soit $V \in \mathbb{R}^n$ non nul.

Montrer que $\int_0^1 \langle V, X(t) \rangle \ dt = \int_0^1 \|V\| \, \|X(t)\| \ dt$ ssi il existe une fonction continue positive ρ telle que

$$\forall t \in [0,1], \ X(t) = \rho(t)V$$

2) ($\bigstar$) Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\left\|\int_0^1 X(t) \ dt\right\| = \int_0^1 \|X(t)\| \, dt$

(ii) Il existe $\rho : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ continue et $V \in \mathbb{R}^n$ tels que $\forall t \in [0,1]$, $X(t) = \rho(t)V$.

Indication : Pour prouver que (i) implique (ii), utiliser $V = \int_0^1 X(t)dt$.