

1) Marche aléatoire équilibrée sur $\mathbb{Z}$

On considère $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ somme de n variables indépendantes de Rademacher ($X_i : \Omega \rightarrow \{-1, 1\}$).

On note $p(n) = P(S_n = 0)$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f(n) = P(S_n = 0 \text{ et } S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \dots, S_{n-1} \neq 0)$.

Autrement dit, $f(n)$ est la probabilité de premier retour en 0 en n .

a) On prend $p(0) = 1$. Montrer que pour tout $n = 2k$ pair, $p(n) = \binom{2k}{k} 4^{-k}$ et que $p(n) = 0$ si n impair.

On pose $P(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} p(n)t^n$ et $F(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} f(n)t^n$ pour $t < 1$.

On obtient alors (*admis ici*) que $p(n) = \binom{2k}{k} 4^{-k} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi k}}$ et $\forall t \in [0, 1[, P(t) = (1 - t^2)^{-1/2}$.

b) Calculer $f(1)$, $f(2)$ et $f(4)$. Montrer que $\sum f(n)$ converge.

c) On considère les événements $A_n : S_n = 0$ et $B_k : \text{“ Le premier retour en 0 se fait au temps } k \text{ ”}$.

Montrer que $P(A_n) = \sum_{k=1}^n P(A_n | B_k)P(B_k)$.

d) Montrer que $P(A_n | B_k) = p(n - k)$. Ainsi, $\forall n \geq 1$, $\boxed{p(n) = \sum_{k=1}^n p(n - k)f(k)}$.

e) En déduire que $\forall t \in [0, 1[, P(t) = 1 + P(t)F(t)$.

On en conclut $\forall t \in [0, 1[, F(t) = 1 - (1 - t^2)^{1/2}$.

f) Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} f(n) = 1$. **Donc presque sûrement, il y a retour en 0.**

2) Inégalité de Jensen. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe.

a) Montrer que f admet une dérivée à gauche et une dérivée à droite en tout point $\mu \in \mathbb{R}$.

b) Montrer que pour tout $\mu \in \mathbb{R}$, il existe une fonction affine L telle que $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(\mu) = L(\mu)$ et $f(t) \geq L(t)$.

c) Soit X une v.a. réelle telle que $f(X)$ est d'espérance finie.

Montrer que X est d'espérance finie et que $f(E(X)) \leq E(f(X))$.

TD n°14 bis. Corrigé

1) On note $X_n \in \{-1, 1\}$ la n -ième variable de Rademacher, c'est-à-dire $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

a) $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ suit une loi binomiale à valeurs dans $\{n - 2k, k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}\}$.

Pour le prouver, il suffit de décomposer $X_n = 1 - 2Z_n$, où Z_n variable de Bernoulli $\mathcal{B}(\frac{1}{2})$.

Donc $P(S_n = n - 2k) = P(Z_1 + \dots + Z_n = k) = \binom{n}{k} 2^{-n} = \binom{2k}{k} 4^{-k}$. On prend $k = \frac{1}{2}n$ si n pair.

b) On a $f(2) = P(S_2 = 0) = P(X_2 = -X_1) = \frac{1}{2}$.

On a $f(4) = P(X_2 = X_1)P(X_3 = -X_1, X_4 = -X_1) = \frac{1}{2} \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$.

Comme les $f(n)$ sont les probabilités d'événements disjoints, alors par additivité, $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n) \leq 1$.

c) S'il y a retour en A_n , il y a nécessairement premier retour en un $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

De plus, les B_k sont disjoints deux à deux. Donc les $A_n \cap B_k$, avec $1 \leq k \leq n$, forment une partition de A_n .

Donc $P(A_n) = \sum_{k=1}^n P(A_n \cap B_k) = \sum_{k=1}^n P(A_n | B_k)P(B_k)$.

Remarque : Il ne s'agit pas stricto sensu de la formule des probabilités totales, car ici, les B_k , où $0 \leq k \leq n$, ne forment pas un système total.

d) On a $P(A_n | B_k) = P(X_{k+1} + X_{k+2} + \dots + X_n = 0 | B_k)$.

Comme $(X_{k+1}, \dots, X_n)$ et $(X_1, \dots, X_k)$ sont indépendantes, alors : $P(X_{k+1} + X_{k+2} + \dots + X_n = 0 | B_k) = P(X_{k+1} + X_{k+2} + \dots + X_n = 0) = p(n - k)$.

e) Les rayons de convergence de $\sum p(n)t^n$ et $\sum f(n)t^n$ sont ≥ 1 , car $0 \leq f(n) \leq p(n) \leq 1$.

Par produit de Cauchy, on a donc $\forall t \in [0, 1[$, $P(t)F(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\sum_{k=0}^n p(n - k)f(k))$.

Comme $f(0) = 0$, on a $\sum_{k=0}^n p(n - k)f(k) = \sum_{k=1}^n p(n - k)f(k) = p(n)$ pour $n \geq 1$.

Donc $\forall t \in [0, 1[$, $P(t)F(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} p(n)t^n = P(t) - 1$.

f) Comme $\sum_{n=0}^{+\infty} f(n)$ converge (absolument), alors $\sum f(n)t^n$ converge normalement sur $[0, 1]$.

Donc F est continue en 1, et ainsi, $\sum_{n=0}^{+\infty} f(n) = F(1) = \lim_{t \rightarrow 1, t < 1} F(t) = \lim_{t \rightarrow 1, t < 1} (1 - (1 - t^2)^{1/2}) = 1$.

Remarque : Pour $t \in [0, 1]$, on a $F(t) = 1 - (1 - t^2)^{1/2}$.

D'où si $n = 2k \geq 2$, $f(n) = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{3}{2} \frac{5}{2} \dots (k - \frac{3}{2}) \frac{1}{k!} = \frac{1}{2k-1} \frac{(2k)!}{(k!)^2} \frac{1}{2^{2k}} = \frac{1}{2k-1} p(n)$.

2) a) Comme f est convexe, la fonction pente $\varphi : x \mapsto \Delta(x, \mu) = \frac{f(x) - f(\mu)}{x - \mu}$ est croissante sur $\mathbb{R} \setminus \{\mu\}$.

(cela résulte de l'inégalité des pentes : si $a > b < c$, on a $\Delta(a, b) \leq \Delta(a, c) \leq \Delta(b, c)$).

Donc φ admet (par le théorème de la limite monotone) une limite à gauche et une limite à droite en μ .

b) De plus, on a $f'_g(\mu) \leq f'_d(\mu)$. On considère alors $L(x) = f(\mu) + \beta(x - \mu)$, où $f'_g(\mu) \leq \beta \leq f'_d(\mu)$.

En effet, pour $x < \mu$, $\varphi(x) \leq f'_g(\mu)$, donc en intégrant sur $[x, \mu]$, $f(x) \geq f(\mu) + f'_g(\mu)(x - \mu) \geq L(x)$.

De même, pour $x > \mu$, $f'_d(\mu) \leq \varphi(x)$, donc en intégrant sur $[x, \mu]$, $f(x) \geq f(\mu) + f'_d(\mu)(x - \mu) \geq L(x)$.

c) On prend $\mu = E(X)$. On a $f(x) \geq L(x)$, donc $E(f(X)) \leq E(L(X)) = L(E(X)) = f(E(X))$.