TD n°13. Corrigé

Exercice A

1) a) b) *Cas I* : $\Delta_A = \{\lambda I_2\}$ est fermée et bornée.

Cas II : $\begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \Delta_A$ pour tout $\alpha \neq 0$ et $\lim_{\alpha \to 0} \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \notin \Delta_A$, donc Δ_A ni bonrée ni fermée.

Cas III : $M \in \Delta_A$ ssi son polynôme caractéristique admet λ et μ comme racines (il est alors scindé à racines simples), donc ssi $\operatorname{tr} M = \lambda + \mu$ et $\det M = \lambda\mu$.

En particulier, $\begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \in \Delta_A$ pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$. Donc Δ_A n'est pas bornée (on fait tendre $\alpha \to +\infty$).

D'autre part, les relations $\operatorname{tr} M = \lambda + \mu$ et $\det M = \lambda\mu$ sont stables par passage à la limite (car tr et det sont continues), donc Δ_A est fermée.

Exercice B

1) a) Il suffit que φ soit strictement positive.

b) - Il est nécessaire que φ soit positive. Supposons en effet par l'absurde que φ n'est pas positive.

Il existe alors par continuité un intervalle $[a, b]$ non trivial tel que $\forall x \in]a, b[,\ \varphi(x) < 0$.

On considère une fonction f non identiquement nulle à support dans $[a, b]$.

On a alors $\int_0^1 |f|\,\varphi = \int_a^b |f|\,\varphi < 0$, ce qui contredit $N(f) \geq 0$.

- Supposons $\varphi \geq 0$. La seule propriété non nécessairement vérifiée est : $N(f) = 0 \Rightarrow f = 0$.

Posons $A = \{x \in [0, 1] \mid \varphi(x) > 0\}$.

On a $N(f) = 0$ ssi $\forall x \in [0, 1],\ f(x)\varphi(x) = 0$, donc ssi $\forall x \in A,\ f(x) = 0$.

On en déduit que N est une norme ssi A est dense dans $[0, 1]$.

Exemple : La propriété est vérifiée par exemple si φ admet un nombre fini ou dénombrable de zéros.

2) a) Il existe $m = \inf_{[0,1]} \dfrac{\varphi}{\psi} > 0$ et $M = \sup_{[0,1]} \dfrac{\varphi}{\psi}$. On a $mN_\psi(x) \leq N_\varphi(x) \leq MN_\psi(x)$.

b) On prend $f_n(t) = \exp(-nt)$.

On a $N_1(f_n) \sim \int_0^{+\infty} t\ e^{-nt}\ dt = \dfrac{1}{n}$ et $N_2(f_n) \sim \int_0^{+\infty} t^2\ e^{-nt}\ dt = \dfrac{2}{n^2}$, donc $\lim_{n \to +\infty} \dfrac{N_1(f_n)}{N_2(f_n)} = +\infty$.

Exercice C

1) a) Les normes étant équivalentes, la notion d'intérieur ne dépend pas du choix de la norme.

Il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x,\ \alpha N(x) \leq \|x\|$, donc B contient tous les vecteurs vérifiant $\|x\| < \alpha$.

b) Soit $\lambda \in]0, 1[$. Soient x et $y \in B$.

On a $\|\lambda x + (1 - \lambda)y\|^2 = \lambda^2 \|x\|^2 + 2\lambda(1 - \lambda) \langle x, y\rangle + (1 - \lambda)^2 \|y\|^2 \leq \lambda^2 + 2\lambda(1 - \lambda) + (1 - \lambda)^2 = 1$.

Pour avoir l'égalité, il faut $\|x\| = \langle x, y\rangle = \|y\| = 1$, donc $x = y$ (cf cas d'égalité dans Cauchy-Schwarz).

On en conclut que si x et y sont distincts, $\|\lambda x + (1 - \lambda)y\| < 1$.

2) a) Comme K n'est pas d'intérieur non vide, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(0, \varepsilon) \subset K$.

Ainsi, pour λ assez grand $\dfrac{\|x\|}{\lambda} \leq \varepsilon$, donc $\left\{\lambda \in \mathbb{R}_+^* \mid \dfrac{x}{\lambda} \in K\right\}$ n'est pas vide. Donc $N(x)$ est défini.

b) On a bien $N(x) \geq 0$. Supposons x non nul.

Comme K est borné, il existe M tel que $K \subset B(0, M)$.

Ainsi, $\forall \lambda > 0,\ \dfrac{x}{\lambda} \in K \Rightarrow \dfrac{\|x\|}{\lambda} \leq M \Rightarrow \lambda \geq \dfrac{M}{\|x\|}$. Donc $N(x) \geq \dfrac{M}{\|x\|} > 0$.

Il existe une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\dfrac{x}{\lambda_n} \in K$ et $\lim_{n\to+\infty} \lambda_n = N(x)$.

Comme $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{x}{\lambda_n} = \dfrac{x}{N(x)}$ et que K est fermé, alors $\dfrac{x}{N(x)} \in K$, donc $N(x) = \min\left\{\lambda \in \mathbb{R}_+^* \mid \dfrac{x}{\lambda} \in K\right\}$.

c) - Par les propriétés de la borne inférieure, on a $N(\mu x) = |\mu| \, N(x)$.

Remarque : Pour le prouver, il suffit de justifier $N(\mu x) \geq |\mu| \, N(x)$, puis de considérer $\mu^{-1}x$ (si $\mu \neq 0$).

- Montrons l'inégalité triangulaire : Soient x et $y \in \mathbb{R}^n$. Montrons $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$.

On peut supposer x et y non nuls. Onpose $\lambda = N(x)$ et $\mu = N(y)$.

On a $\dfrac{x+y}{\lambda+\mu} = \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}\dfrac{x}{\lambda} + \dfrac{\mu}{\lambda+\mu}\dfrac{y}{\mu}$ barycentre de $\dfrac{x}{\lambda}$ et $\dfrac{y}{\mu}$ à coefficients (strictement) positifs.

Donc $\dfrac{x+y}{\lambda+\mu}$ appartient au segment $\left[\dfrac{x}{\lambda}, \dfrac{y}{\mu}\right]$. comme K est convexe, $\dfrac{x+y}{\lambda+\mu} \in K$.

Donc $\lambda + \mu \geq N(x+y)$, ce qu'il fallait prouver.

d) Montrons que K est bien la boule unité pour la norme N. On a $N(x) \leq 1$ ssi $1 \in \Delta(\lambda)$, donc ssi $\dfrac{x}{1} \in K$.