TD n°13. Exemples de normes

Exercice A. Topologie dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$

1) Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ une matrice d'ordre 2 à coefficients complexes.

On considère trois cas :

Cas I : $A = \lambda I_2$; Cas II : $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$; Cas III : $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ avec $\lambda \neq \mu$.

On note Δ_A la classe de similitude de A, c'est-à-dire : $M \in \Delta_A$ ssi $\exists P \in GL_2(\mathbb{C})$, $M = P^{-1}AP$.

a) [1.5 pt] Déterminer dans chaque cas si Δ_A est une partie bornée de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

b) [1.5 pt] Déterminer dans chaque cas si Δ_A est une partie fermée de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

2) On dit qu'une matrice A est isolée dans Δ ssi $\exists \varepsilon > 0$, $B(A, \varepsilon) \cap \Delta = \{A\}$.

Déterminer les matrices $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ qui sont isolées dans leur classe de similitude Δ_A.

Exercice B. Norme de fonctions

1) Pour $f \in E = C^0([0,1], \mathbb{R})$, on considère $N_\varphi(f) = \int_0^1 |f(t)|\, \varphi(t)\, dt$, où $\varphi \in E$.

a) Proposer sans justification une condition suffisante sur ω pour que N soit une norme sur E.

b) Donner sans justification une CNS sur φ pour que N soit une norme.

2) a) On suppose φ et ψ strictement positives. Montrer que N_φ et N_ψ sont équivalentes.

b) On prend $N_1(f) = \int_0^1 |f(t)|\ t\, dt$ et $N_2(f) = \int_0^1 |f(t)|\ t^2\, dt$.

En considérant $f_n(t) = e^{-nt}$, montrer que N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes.

Exercice C. Norme de $\mathbb{R}^n$ définie par un compact convexe

1) Soit N une norme sur $\mathbb{R}^n$.

a) On sait que la boule unité B de N est convexe, compacte, symétrique.

Justifier que l'intérieur de B (pour la norme euclidienne $\| \ \|$) contient $\overrightarrow{0}$.

b) On considère dans cette question $\mathbb{R}^n$ muni de la norme euclidienne (canonique) qu'on note $\| \ \|$.

Montrer que B est strictement convexe : $\forall (x,y) \in B^2$, $x \neq y \Rightarrow \forall \lambda \in]0,1[$, $\|\lambda x + (1-\lambda)y\| < 1$.

2) Soit K un convexe de $\mathbb{R}^n$ compact , symétrique, contenant 0 dans son intérieur.

Terminologie : K compact signifie que K est borné et fermé.

On se propose de construire une norme N dont K est la boule unité.

On pose $N(x) = \inf(\Delta_x)$, où $\Delta_x = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}_+^* \mid \dfrac{x}{\lambda} \in K \right\}$.

a) Montrer que $N(x)$ est bien défini pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

b) Soit $x \in \mathbb{R}^n$ non nul. Montrer que $N(x) > 0$, que $N(x) = \min(\Delta_x)$ et que $\Delta_x = [N(x), +\infty[$.

c) Montrer que N est une norme.

Indication : Pour l'inégalité triangulaire, utiliser $\dfrac{x+y}{\lambda+\mu} = \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}\dfrac{x}{\lambda} + \dfrac{\mu}{\lambda+\mu}\dfrac{y}{\mu}$.

d) Montrer que K est bien la boule unité (fermée) de N.