TD n°12. Corrigé

1) a) Pour tout $\rho > 0$, $(e^n \rho^{(n^2)})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée ssi $\rho < 1$, donc $R = 1$.

b) On a $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2} = \exp\left(n^2 \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right) = \exp\left(n - \dfrac{1}{2} + \mathfrak{o}\left(1\right)\right) \sim \dfrac{1}{\sqrt{e}} e^n$. Donc $R = e^{-1}$.

c) $\sum n!\ z^n$: Par le critère de d'Alembert, $R = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{+\infty} = 0$.

2) Pour $\rho \in]0, R[$, $\lim_{n\to+\infty} a_n \rho^n = 0$ (car $\sum a_n \rho^n$ cv), donc $\lim_{n\to+\infty} b_n \rho^n = \infty$, d'où $R' \leq \rho^{-1}$.

En faisant tendre ρ vers R, on obtient $R' \leq R^{-1}$, c'est-à-dire $RR' \leq 1$.

L'inégalité peut être stricte : Par exemple, avec $a_n = 2^n$ si n est pair, et 1 sinon, on a $R = \frac{1}{2}$ et $R' = 1$.

3) On considère la série entière f définie par $\forall x \in]-1, 1[$, $f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$.

Donc $\forall x \in]-1, 1[\quad f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} n x^{n-1}$ et $F(x) = \int_0^x f(t)dt = -\ln(1-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$.

Avec $x = \frac{1}{2}$, on obtient $U = xf'(x) = 2$, $W = F(x) = \ln 2$.

En dérivant deux fois, et en écrivant $n^2 = n(n-1) + n$, on obtient, avec $x = \frac{1}{2}$, $V = x^2 f''(x) + xf'(x) = 4 + 2 = 6$.

4) a) La série de fonctions $\sum (-1)^n x^{pn+r-1}$ converge normalement vers $\dfrac{x^{r-1}}{1+x^r}$ sur tout segment $[0, a]$, où $a < 1$.

On a donc $\int_0^x \dfrac{t^{r-1}}{1+t^p}\ dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x (-1)^n t^{pn+r-1}\ dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n x^{pn+r}}{pn+r}$.

La série de fonctions $\sum \dfrac{(-1)^n x^{pn+r}}{pn+r}$ cv uniformément sur $[0, 1]$. Donc $x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n a^{pn+r}}{pn+r}$ est continue.

En faisant tendre x vers 1^-, on obtient bien $\int_0^1 \dfrac{x^{r-1}}{1+x^p}\ dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{pn+r}$.

b) On a $A = \int_0^1 \dfrac{dx}{1+x^2} = \arctan(1) = \dfrac{\pi}{4}$.

Comme $\dfrac{1}{(4n+1)(4n+3)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{4n+1} - \dfrac{1}{4n+3}\right)$, alors $B = \dfrac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1} = \dfrac{1}{2} \arctan(1) = \dfrac{\pi}{8}$.

5) On choisit $a \in E$.

Une partition est entièrement déterminée par le choix de A contenant a et d'une partition de $E \setminus A$.

La partie A s'écrit de façon unique $A = B \sqcup \{a\}$, où B est une partie arbitraire de $F = E \setminus \{a\}$.

Donc $S_{n+1} = \sum_{B\subset F} S_{n-\mathrm{card}\, B} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} S_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} S_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} S_k$.

6) On a $a_0 = S_0 = 1$. On vérifie par récurrence forte que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq a_n \leq 1$.

En effet, si la propriété est vraie pour tout $0 \leq k \leq n$, on a $a_{n+1} \leq \dfrac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} 1 = 1$.

Donc la série entière $\sum a_n x^n$ est de rayon de convergence $R \geq 1$.

7) Soit $x \in]-R, R[$. On a $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \dfrac{a_k}{(n-k)!} x^n$.

On reconnaît lr produit de Cauchy des séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum \frac{1}{n!} x^n$ (bien définies pour x).

On obtient donc $f'(x) = f(x) \exp(x)$.

D'où $f(x) = K \exp(\exp(x))$, et comme $f(0) = a_0 = 1$, alors $f(x) = e^{-1} \exp(\exp(x))$.

8) On a donc $f(x) = e^{-1} \sum_{p=0}^{+\infty} \dfrac{\exp(px)}{p!} = e^{-1} \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(px)^n}{p!n!}$.

Comme tous les termes sont positifs, la famille $\left(\dfrac{(px)^n}{p!n!}\right)_{(p,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ est sommable.

Par Fubini, on a donc $\forall x \in]-R, R[,\ f(x) = e^{-1}\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty}\dfrac{(px)^n}{p!n!}$.

Comme la fonction série entière définit entièrement les coefficients de la série, on obtient :

$\forall n \in \mathbb{N},\ \ a_n = e^{-1}\sum_{p=0}^{+\infty}\dfrac{p^n}{p!n!}$. Donc $S_n = e^{-1}\sum_{p=0}^{+\infty}\dfrac{p^n}{p!}$.

9) On a $\forall x \in]-1,1[,\ \dfrac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$, avec $c_n = \dfrac{1}{n!}\dfrac{1}{2}\dfrac{3}{2}\dfrac{5}{2}...\dfrac{(2n-1)}{2} = \dfrac{1}{2^n(n!)}\dfrac{(2n)!}{2^n(n!)} = \dfrac{(2n)!}{4^n(n!)^2}$.

Donc $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^{2n}$, et par intégration, $\arcsin x = \sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(2n)!}{4^n(n!)^2}\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

10) On a d'une part $\forall t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\arcsin(\sin t) = t$, donc $\int_0^{\pi/2}\arcsin(\sin t)\ dt = \sum_{n=0}^{+\infty} t\ dt = \dfrac{\pi^2}{8}$.

D'autre part, pour tout $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $\sin t \in [0,1[$, donc $\arcsin(\sin t) = \sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(2n)!}{4^n(n!)^2}\dfrac{(\sin t)^{2n+1}}{2n+1}$.

On applique le théorème d'intégration terme à terme. En effet, tous les termes sont positifs, et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{\pi/2}\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}\frac{(\sin t)^{2n+1}}{2n+1}\ dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}\frac{W_{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$$

Comme la série converge, alors $\int_0^{\pi/2}\arcsin(\sin t)\ dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1}{(2n+1)^2}$. Donc $\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1}{(2n+1)^2} = \dfrac{\pi^2}{8}$.