TD n°12. Séries entières.

Exercice A. Calculs de rayons de convergence

1) a) Déterminer le rayon de convergence de $\sum e^n z^{(n^2)}$.

b) Déterminer le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$, avec $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$.

c) Donner un exemple de série entière de rayon de convergence $R = 0$.

2) Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in \mathbb{R}_+^*$. On pose $b_n = \dfrac{1}{a_n}$, et R' le rayon de $\sum b_n z^n$.

a) Montrer que $RR' \leq 1$. *Indication* : Noter d'abord que pour tout $\rho \in]0, R[$, $(a_n \rho^n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

b) Donner un exemple où $RR' < 1$.

Exercice B. Calculs de sommes utilisant les séries entières

3) Calculer les sommes $U = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{n}{2^n}$ et $V = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{n^2}{2^n}$ et $W = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n2^n}$.

4) a) Soient p et $r \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{(pn+r)} = \int_0^1 \dfrac{x^{r-1}}{1+x^p}\, dx$.

b) Déterminer $A = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)}$, et en déduire $B = \dfrac{1}{1\times 3} + \dfrac{1}{5\times 7} + \dfrac{1}{9\times 11} + ...$

Exercice C. Série génératrice des partitions

On considère S_n le nombre de partitions de $E = [\![1, n]\!]$.

Remarque : une partition de E est un ensemble de parties disjointes non vides dont la réunion est E.

5) On a $S_0 = 1$. Montrer que $S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} S_k$.

Indication : Considérer la partie A de la partition contenant un élément $a \in E$ fixé.

6) On pose $a_n = \dfrac{S_n}{n!}$. On obtient donc $(n+1)a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{a_k}{(n-k)!}$.

Montrer que la série entière $\sum a_n x^n$ est de rayon de convergence $R > 0$.

7) On pose $\forall x \in]-R, R[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

En utilisant une équation différentielle, montrer que $f(x) = e^{-1}\exp(\exp(x))$.

8) En utilisant le théorème de Fubini, montrer la formule de Dobinsky : $S_n = e^{-1} \sum_{p=0}^{+\infty} \dfrac{p^n}{p!}$.

Exercice D. Développement de arcsin et intégrales de Wallis

9) Montrer que $\forall x \in]-1, 1[$, $\arcsin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

10) On considère l'intégrale de Wallis $W_n = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^n\, dt$.

Par une IPP, on obtient $\forall n \geq 2$, $W_n = \dfrac{n-1}{n} W_{n-2}$. D'où on déduit $W_{2n+1} = \dfrac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}$.

En considérant $\int_0^{\pi/2} \arcsin(\sin t)\, dt$, déduire de ce qui précède la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(2n+1)^2}$.