TD n°11. Corrigé

1) a) Convergence normale sur $\mathbb{R}$, car $\sum \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\dfrac{1}{2^n} \ \sin(2^n x)\right| = \sum \dfrac{1}{2^n}$ converge.

b) On a $f(x) = \dfrac{1}{2} f(2x) + \sin(x)$. Si f était dérivable, on aurait $f'(0) = f'(0) + 1$, ce qui est absurde.

2) a) On a $\ln(1 + x^n) \leq x^n$, d'où la convergence de la série pour tout $0 \leq x < 1$ (par comparaison avec une somme géométrique). La convergence est normale sur tout segment $[0, a]$, avec $a < 1$ (les sup sont atteints en $x = a$).

La convergence n'est pas normale sur $[0, 1[$, car $\sup_{x\in[0,1[} \ln(1 + x^n) = \ln 2$.

b) Par comparaison entre séries et intégrales, $J(x) \leq f(x) \leq \ln 2 + J(x)$, où $J(x) = \int_0^{+\infty} \ln(1 + e^{-t\ln x})\ dt$.

On a $J(x) = \dfrac{K}{-\ln x}$, où $K = \int_0^{+\infty} \ln(1 + e^{-u})\ du = \int_0^1 \dfrac{\ln(1+t)}{t}\ dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{12}$ par ITT.

On en conclut par pincement que $f(x) \sim \dfrac{\pi^2}{12(1-x)}$ lorsque x tedn vers 1^-.

3) Posons $f_n(x) = x^n \exp(-n^2 x)$.

Pour $[a, b] \subset]0, +\infty[$, on a $\sup_{x\in[a,b]} |f_n| \leq b^n \exp(-n^2 a)$.

Donc $\sum f_n$ converge normalement sur tout segment $[a, b]$ inclus dans $]0, +\infty[$, donc f est continue sur $]0, +\infty[$.

Il reste à prouver la continuité en 0, qui résulte de la convergence normale sur $[0, \frac{1}{2}]$, car $0 \leq f_n(x) \leq x^n$

4) On pose $M = \sup_{[-a,a]} |f_0|$. On montre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [-a, a]$, $|f_n(x)| \leq M\dfrac{|x|^n}{n!}$.

Donc la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge normalement sur tout segment vers une fonction F.

De plus, $\forall n \geq 1$, $f_n' = f_n$, donc $\sum_{n\geq 1} f_n'$ converge normalement, et F est C^1 et $F' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = f_0 + F$.

Donc $F(x) = Ke^x + e^x \int_0^x f_0(t)e^{-t}\ dt$, et $K = 0$, car $F(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(0) = 0$.

5) *Remarque* : Les limites des f_n et S existent dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ par le th de la limite monotone.

a) On a $\sup_{[0,1]} f_n = \lambda_n$. Donc $\sum f_n$ converge normalement.

Par le théorème de la double limite, $\lim_{t\to 1, t<1} S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n$.

b) Soit $p \in \mathbb{N}$. On a $\sum_{n=0}^{p} f_n(t) \leq S(t)$, donc par passage à la limite, $\sum_{n=0}^{p} \lambda_n \leq \lim_{t\to 1, t<1} S(t)$.

En faisant tendre p vers $+\infty$, on a donc $\lim_{t\to 1, t<1} S(t) = +\infty$.

c) On applique a) et b) avec $f_n(t) = a_n(1 + t + t^2 + ... + t^{n-1})$. Ainsi, $\lim_{t\to 1, t<1} f_n(t) = na_n$.

On obtient $G_X'(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} na_n \quad (\text{dans } \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\})$.

6) On considère $(d + 1)$ points fixés $(x_k)_{0\leq k\leq d}$ dans $[0, 1]$.

On a donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $P_n(x) = \sum_{k=0}^{d} P_n(x_k)L_k(x)$, où $L_k(x) = \prod_{j\neq k} \dfrac{x - x_j}{x_k - x_j}$.

On en déduit donc en faisant tendre n vers l'infini que $\forall x \in [0, 1]$, $f(x) = \sum_{k=0}^{d} f(x_k)L_k(x)$.

Donc f est bien une fonction polynôme de degré $\leq d$.

De plus, $\|f - P_n\|_\infty \leq \sum_{k=0}^{d} |f(x) - P_n(x_k)| \ \ \|L_k\|_\infty$, qui tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

Donc $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.

7) a) Oui : On a $\forall x \in E$, $\lim_{n\to+\infty} |f_n(x) - f(x)| = 0$, donc $\lim_{n\to+\infty} \max_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| = 0$.

b) Tout x appartient à un intervalle $\left[\frac{k}{p}, \frac{k-1}{p}\right]$.

On a donc $|f_n(x) - f(x)|$On a $|f_n(x) - f(x)| \leq \left|f_n(x) - f_n(\frac{k}{p})\right| + \left|f_n(\frac{k}{p}) - f(\frac{k}{p})\right| + \left|f(\frac{k}{p}) - f(x)\right|$.

Comme les fonctions sont 1-lipschiziennes, $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{2}{p} + \left|f_n(\frac{k}{p}) - f(\frac{k}{p})\right| \leq 2\varepsilon + \left|f_n(\frac{k}{p}) - f(\frac{k}{p})\right|$.

Pour $n \geq n_0$ assez grand, on a $\forall k \in \{1, 2, ..., p - 1\}$, $\left|f_n(\frac{k}{p}) - f(\frac{k}{p})\right| \leq \varepsilon$. Donc $\forall n \geq n_0$, $|f_n(x) - f(x)| \leq 3\varepsilon$.