TD n°09. Espaces euclidiens. Corrigé

1) a) $\langle A,B\rangle = \sum_{1\le i\le n, 1\le j\le n} a_{ij}b_{ij}$ est le psc dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{(n^2)}$. Et $N(A)^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 = \sum_{j=1}^n \|A_j\|^2$.

b) $\left\|A^T X\right\|^2 = \sum_{j=1}^n (A_j \mid X)^2 \le \sum_{j=1}^n \|A_j\|^2 \|X\|^2 = N(A)^2 \|X\|^2$.

Comme $N(A) = N(A^T)$, on a aussi $\forall X \in \mathbb{R}^n$, $\|AX\| \le N(A)\|X\|$.

c) Les colonnes de AB sont les AB_j, donc par b), $N(AB)^2 = \sum_{j=1}^n \|AB_j\|^2 \le \sum_{j=1}^n N(A)^2 \|B_j\|^2 = N(A)^2 N(B)^2$.

Preuve directe (via Cauchy-Schwarz) : $N(AB)^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk}\right)^2$.

$\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk}\right)^2 \le \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^2\right)\left(\sum_{l=1}^n b_{lk}^2\right)$, donc $N(AB)^2 \le \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2\right)\left(\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n b_{lk}^2\right) = N(A)^2 N(B)^2$.

d) Montrons que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont orthogonaux. Soient $(S,R) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Alors $(R \mid S) = \operatorname{tr}(R^T S) = -\operatorname{tr}(RS) = -\operatorname{tr}(SR) = -\operatorname{tr}(S^T R) = -(R \mid S)$, donc $(R \mid S) = 0$.

On sait $A = S + R$, avec $S = \frac{1}{2}(A + A^T) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $R = \frac{1}{2}(A - A^T) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Par Pythagore, $N(A-S)$ est minimale lorsque S est le projeté orthogonal de A sur $S_n(\mathbb{R})$, donc pour $S = \frac{1}{2}(A+A^T)$.

2) a) Soit $A \in O_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Chaque colonne A_j est de norme 1, c'est-à-dire $\sum_{i=1}^n (a_{ij})^2 = 1$.

Comme les coefficients $(a_{ij})^2$ sont des entiers, ils sont tous nuls à l'exception d'un seul qui vaut 1. Donc il existe $\varepsilon_j \in \{-1,1\}$ et $\sigma(j) \in \{1,2,...,n\}$ tels que $A_j = \varepsilon_j E_{\sigma(j)}$.

Comme A est inversible, les $\sigma(j)$ sont deux à deux distincts, donc σ est une permutation de $\{1,2,...,n\}$.

Réciproquement, toute matrice $A = (\varepsilon_1 E_{\sigma(1)}, ..., \varepsilon_1 E_{\sigma(1)})$ convient.

Il y a 2^n choix pour $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$ et $n!$ pour σ, donc $2^n\ n!$ choix pour A.

b) On impose de plus la condition $\det A = 1$, ce qui revient à exprimer ε_n en fonction des autres ε_j et de σ.

On obtient donc $2^{n-1}\ n!$ choix pour $A \in SO_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.

3) a) Les A_j sont orthogonaux, donc par Pythagore, $\left\|\sum_{j=1}^n A_j\right\|^2 = \sum_{j=1}^n \|A_j\|^2 = n$.

b) On a d'autre part $s = \left(\sum_{j=1}^n A_j \mid Z\right)$, où $Z = (1,1,...,1)$.

Donc par Cauchy-Schwarz, $|s| \le \left\|\sum_{j=1}^n A_j\right\| \|Z\| = \sqrt{n}\sqrt{n} = n$.

Remarque : On peut aussi appliquer Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$:

On pose $(s_1, ..., s_n)$ les coefficients de $\sum_{j=1}^n A_j$. On a alors $|s| \le |s_1| + ... + |s_n| \le \sqrt{n}\sqrt{s_1^2 + ... + s_n^2} = n$.

Remarque anecdotique : En revanche, on a seulement $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \le n\sqrt{n}$.

En effet, par Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^{(n^2)}$, $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \le \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2} = n\sqrt{n}$.

4) a) On applique le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à $(A_1, ..., A_n)$.

On obtient une base orthonormée $(U_1, ..., U_n)$ de $\mathbb{R}^n$ telle que $\forall j$, $\operatorname{Vect}(U_1, ..., U_j) = \operatorname{Vect}(A_1, ..., A_j)$.

b) La matrice $U = (U_1, ..., U_n)$ définie au b) est orthogonale. De plus, on a $A_j = \sum_{i=1}^j t_{ij} U_i$.

Donc $A = UT$, où T est la matrice triangulaire de coefficients t_{ij}. *Remarque* : $T = \operatorname{Mat}_{(U_1,...,U_n)}(A_1, ..., A_n)$.

c) On a $A_j = UT_j$, donc $\|A_j\| = \|T_j\|$, et a fortiori, $\|A_j\| \ge |t_{jj}|$.

On obtient donc $|\det A| = |\det T| = \prod_{j=1}^n |t_{jj}| \le \prod_{j=1}^n \|A_j\|$.

d) On applique c) à la matrice A^{-1}. On a donc $A^{-1} = UT$, donc $A = T^{-1}U^{-1}$.

On a bien T^{-1} triangulaire supérieure et $U^{-1} = U^T$ orthogonale.