TD n°09. Espaces euclidiens

1) *Produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

On munit $\mathbb{R}^n$ du psc $(X \mid Y) = X^T Y = \sum_{j=1}^n x_j y_j$ et on note $\|X\|$ la norme associée.

a) Montrer brièvement que $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(A^T B)$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(*Indication* : Reconnaître le produit scalaire canonique). On note désormais $N(A)$ la norme associée.

Exprimer $N(A)^2$ en fonction des coefficients a_{ij}, et en fonction des $\|A_j\|^2$.

b) Montrer que $\forall X \in \mathbb{R}^n$, $\left\|A^T X\right\| \leq N(A)\,\|X\|$ et $\|AX\| \leq N(A)\,\|X\|$.

c) Montrer que $N(AB) \leq N(A)N(B)$.

d) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On sait que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ (cf matrices symétriques et anti-symétriques).

Montrer que $S_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont orthogonaux. En déduire $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ symétrique minimisant $N(A - S)$.

2) Une matrice est orthogonale ssi les vecteurs colonnes forment une BON de $\mathbb{R}^n$ (muni du psc).

a) Montrer que le nombre de matrices de $O_n(\mathbb{R})$ qui sont à coefficients entiers est $2^n\ n!$

b) Déterminer le nombre de matrices de $SO_n(\mathbb{R})$ qui sont à coefficients entiers.

Indication : a) Soit $A \in O_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Montrer que les colonnes de A sont, au signe près, les vecteurs de la base canonique : $A = (\varepsilon_1 E_{\sigma(1)}, ..., \varepsilon_n E_{\sigma(n)})$, avec $\sigma \in S_n$ (permutation) et $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$.

3) Soit $A \in O_n(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale. On note $A_1, ..., A_n$ les colonnes de A.

On pose $s = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}$.

a) Montrer que $\left\|\sum_{j=1}^n A_j\right\| = \sqrt{n}$.

b) En interprétant s par un produit scalaire, en déduire $|s| \leq n$.

4) *Décomposition dite d'Iwasawa (ou QR) : version matricielle du procédé de Gram-Schmidt.*

a) Soit $(A_1, ..., A_n)$ une base de vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

Montrer qu'il existe une base orthonormée $(U_1, ..., U_n)$ de $\mathbb{R}^n$ telle que $\forall j,\ A_j \in \mathrm{Vect}(U_1, ..., U_j)$.

b) Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$.

Montrer qu'il existe U matrice orthogonale et T triangulaire supérieure telles que $\boxed{A = UT}$.

c) Montrer que $|t_{jj}| \leq \|A_j\|$. En déduire l'inégalité d'Hadamard : $|\det A| \leq \|A_1\| ... \|A_n\|$.

d) Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$.

Montrer qu'il existe U matrice orthogonale et T triangulaire supérieure telles que $\boxed{A = TU}$.