**TD n°8. Réduction en algèbre linéaire. Corrigé**

**A.** En développant selon la deuxième ligne, on a :

$$\begin{vmatrix} x-1 & -2 & -\varepsilon \\ 0 & x-2 & 0 \\ -\varepsilon & -2 & x-1 \end{vmatrix} = (x-2)\begin{vmatrix} x-1 & -\varepsilon \\ -\varepsilon & x-1 \end{vmatrix} = (x-2)((x-1)^2-1) = x(x-2)^2.$$ Donc $\mathrm{Sp}(A) = \{1, 2\}$.

On a $\mathrm{rg}(A - 2I_3) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{cases} 1 \text{ si } \varepsilon = -1 \\ 2 \text{ si } \varepsilon = 1 \end{cases}$, donc $\dim E_2 = \begin{cases} 2 \text{ si } \varepsilon = -1 \\ 1 \text{ si } \varepsilon = 1 \end{cases}$

Donc $A$ est diagonalisable lorsque $\varepsilon = -1$ et $A$ n'est pas diagonalisable lorsque $\varepsilon = 1$.

**B.1)** a) On a $u(X^k) = \frac{1}{k+1}((X+1)^{k+1} - X^{k+1}) = X^k + ...$ de degré $k$.

La linéarité de $u$ est immédiate. Donc pour tout $Q \in K_n[X]$, $u(Q)$ est un polynôme de degré $\leq n$.

b) La matrice de $u$ dans la base canonique $(1, X, ..., X^n)$ est triangulaire supérieure, avec des 1 sur la diaognale. Donc 1 est la seule valeur propre de $u$, et pour $n \geq 1$, $u$ n'est pas diagonalisable (car $u \neq \mathrm{Id}$).

**B.2)** On a $u(X^k) = (n-k)X^k + ...$ La matrice de $u$ dans la base canonique est donc triangulaire supérieure, avec $(n+1)$ valeurs propres distinctes. Donc $u$ est diagonalisable.

**C.1)** On a $BA = B(AB)B^{-1}$, donc $AB$ et $BA$ sont semblables.

**C.2)** On a $E_{12}E_{11} = O_2$ et $E_{11}E_{12} = E_{12}$ non semblable à $O_2$.

**C.3)** a) $B - \mu I$ est inversible ssi $\mu$ distinct des valeurs propres de $b$.

Comme elles sont en nombre fini, alors pour $k$ assez grand, $\frac{1}{k}$ n'est pas valeur propre de $B$.

b) Par 1), pour $k$ assez grand, les matrices $AB_k$ et $B_kA$ sont semblables donc ont le même polynôme caractéristique. Pour tout $k$ assez grand, on a $\chi_{AB_k} = \chi_{B_kA}$.

Or, les polynômes caractéristiques de $A(B - \mu I_n)$ et de $(B - \mu I_n)A$ sont des polynômes dont les coefficients sont des polynômes en $\mu$ (pour $A$ et $B$ matrices fixées). D'où la continuité par rapport à $\mu$.

Comme $\lim_{k\to+\infty} AB_k = AB$, alors $\lim_{k\to+\infty} \chi_{AB_k} = \chi_{AB}$.Et de même $\lim_{k\to+\infty} \chi_{B_kA} = \chi_{BA}$.

En faisant tendre $k$ vers $+\infty$ dans $\chi_{AB_k} = \chi_{B_kA}$, on en déduit donc que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

**D.1)** On a $\chi_J(x) = \det \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ -1 & x & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & -1 & x & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & x \end{pmatrix}$. On développe selon la première ligne.

On obtient : $\chi_J(x) = x^n + (-1)^{n-1}(-1)(-1)^{n-1} = x^n - 1$.

**D.2)** $\chi_J$ est scindé à racines simples et les racines sont les racines $n$-ième de l'unité $\omega^k$, où $0 \leq k < n$.

Question supplémentaire : Pour déterminer $Q$, on cherche une base de vecteurs propres.

On résout donc $JX = \omega^j X$, qui s'écrit $x_{i+1} = \omega^j x_i$. On obtient par exemple $X = (\omega^{ij})_{0 \leq i < n}$.

autrement dit, la matrice de Van de Monde $Q = (\omega^{ij})_{0\leq i<n, 0\leq j<n}$ convient.

**D.3)** a) $J^k$ est la matrice définie par $J^k(e_j) = e_{(j+k) \bmod n}$.

b) Avec $Q^{-1}JQ = D$ diagonale, on a $Q^{-1}J^kQ = D^k$, donc les $J^k$ sont codiagonalisables.

c) Donc $Q^{-1}MQ = \sum_{k=0}^{n-1} a_k Q^{-1}J^kQ = \sum_{k=0}^{n-1} a_k D^k$.

Donc $M$ est diagonalisable et les valeurs propres sont les $\sum_{k=0}^{n-1} a_k(\omega^j)^k = P(\omega^j)$.

Donc $\det M = \prod_{k=0}^{n-1} P(\omega^j)$.

*Exemple* : Pour $n = 3$, $\det \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix} = (a+b+c)(a+bj+cj^2)(a+bj^2+cj)$, où $j = e^{2i\pi/3}$.