TD n°8. Réduction des endomorphismes

Exercice A. Exemple de réduction de matrices d'ordre 3

Déterminer le spectre de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ 0 & 2 & 0 \\ \varepsilon & 2 & 1 \end{pmatrix}$, où $\varepsilon \in \{-1, 1\}$. La matrice A est-elle diagonalisable ?

Exercice B. Exemples d'endomorphismes dans l'espace des polynômes

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $u : K_n[X] \to K_n[X] \quad P(X) \longmapsto Q(X)$, où $Q(x) = \int_x^{x+1} P(t)\, dt$.

a) Justifier que u est un endomorphisme.

b) Montrer que 1 est la seule valeur propre de u. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

2) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $u : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ défini par $u(P) = nP - (X+1)P'$ est diagonalisable.

Exercice C. Polynômes caractéristiques de AB et BA

Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.

1) a) On suppose B **inversible**. Montrer que **les deux matrices** AB **et** BA **sont semblables**.

b) Donner un exemple de matrices A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que AB et BA ne sont pas semblables.

Indication : Considérer des matrices canoniques E_{ij} dans $\mathcal{M}_2(K)$.

2) On suppose B quelconque.

a) On note Δ l'ensemble de valeurs de $\mu \in \mathbb{R}$ telles que $B - \mu I_n$ est inversible.

En déduire que pour k assez grand, la matrice $B_k = B - \frac{1}{k} I_n$ est inversible.

b) En déduire que dans le cas général, les matrices AB et BA ont le même polynôme caractéristique.

Indication : Utiliser la continuité (comme fonctions de μ) des coefficients de $\chi_{A(B-\mu I)}$ et de $\chi_{(B-\mu I)A}$.

Exercice D. Déterminant circulant

Soient $a_0, a_1, ..., a_{n-1} \in \mathbb{C}$. On pose $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.

On pose $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 1 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} = (\delta_{i=(j+1) \bmod n})_{1 \le i \le n, 1 \le j \le n}$ et $M = \begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 \\ a_1 & a_0 & a_{n-1} & \ddots & a_2 \\ a_2 & a_1 & a_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}$.

1) Démontrer que le polynôme caractéristique de J est $\chi_J(x) = \det(xI_n - J) = (x^n - 1)$.

2) En déduire que J est diagonalisable que ses valeurs propres sont les ω^j, où $0 \le j < n$ et $\omega = e^{2i\pi/n}$.

Remarque : Question supplémentaire : Trouver $Q \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $Q^{-1}JQ$ est diagonale.

3) a) Expliciter J^k pour tout $k \in \mathbb{N}$ (noter que l'endomorphisme associé u est défini par $u(e_j) = e_{(j+1) \bmod n}$).

En déduire que $M = a_0 I_n + a_1 J + ... + a_{n-1} J^{n-1}$.

b) Justifier que les J^k sont codiagonalisables (c'est-à-dire qu'ils sont diagonalisables dans une même base).

c) En déduire que M est diagonalisable de valeurs propres $P(\omega^k)$ et que $\det M = \prod_{k=0}^{n-1} P(\omega^k)$.