TD n°7. Corrigé

Exercice A. Matrices compagnons

1) a) On a $P_n(x) = xQ_{n-1}(x) - (-1)^{n-1}(-a_0)(-1)^{n-1} = xQ_{n-1}(x) + a_0$.

Par hypothèse de récurrence, $Q_{n-1}(x) = x^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} a_k x^{k-1}$, d'où $P_n(x) = x^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$.

b) En retranchant, pour $i = 2, 3, ..., n$, à la i-ième ligne la précédente multipliée par $\frac{1}{x}$, on obtient

$$P_n(x) = \begin{vmatrix} x & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 0 & x & \ddots & \vdots & a_1 + a_0 x^{-1} \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & x & a_{n-2} + a_{n-3}x^{-1} + ... + a_0 x^{-(n-1)} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & x + a_{n-1} + a_{n-2}x^{-1} + a_{n-3}x^{-2} + ... + a_0 x^{-n} \end{vmatrix}$$

Donc $\forall x \neq 0$, $P_n(x) = x^{n-1}(x + a_{n-1} + a_{n-2}x^{-1} + a_{n-3}x^{-2} + ... + a_0 x^{-n}) = x^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$.

Deux polynômes qui coïncident sur $\mathbb{C}^*$ sont égaux, donc $P_n(x) = x^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$.

Exercice B. Calcul du déterminant de Van der Monde par deux méthodes

1) a) On développe selon a dernière ligne : On obtient $P(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j x^j$, avec $c_j = V_{n-1}(a_1, a_2, ..., a_{n-1})$.

b) On suppose que $a_1, a_2, ..., a_{n-1}$ sont deux à deux distincts.

Pour tout $k \in \{1, 2, ..., n-1\}$, on a $P(a_k) = 0$ (car la matrice associée admet deux lignes égales).

Comme $\deg P \leq n-$, alors $P(x) = \lambda = \prod_{k=1}^{n-1}(x - a_k)$, et il résulte de a) que $\lambda = V_{n-1}(a_1, a_2, ..., a_{n-1})$.

c) Il résulte de b) que $V_n(a_1, a_2, ..., a_n) = V_{n-1}(a_1, a_2, ..., a_{n-1}) \prod_{k=1}^{n-1}(x - a_k)$ lorsque les a_k, avec $1 \leq k \leq n-1$, sont distincts deux à deux. La relation est aussi vraie sinon, car les deux termes sont nuls.

d) Noter que $V_1(a_1) = 1$ et $V_2(a_1, a_2) = a_2 - a_1$. On conclut par récurrence immédiate sur n.

2) a) On part de la matrice de Van der Monde.

En ajoutant à la dernière colonne une combinaison linéaire des autres, on a

$$V_n(a_1, a_2, ..., a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-2} & P_{n-1}(a_1) \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-2} & P_{n-1}(a_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-2} & P_{n-1}(a_n) \end{vmatrix}.$$

De même, on ajoute à l'avant-dernière colonne une combinaison linéaire des précédentes.

On procède de même avec les colonnes jusqu'à la première.

On obtient bien $V_n(a_1, a_2, ..., a_n) = \det(P_j(a_i))_{1 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq n-1}$.

b) On prend $P_j(x) = \prod_{i=1}^{j}(x - a_j)$. On a donc $P_j(a_i) = 0$ pour tous $i \leq j$.

Dans ce cas, $(P_j(a_i))_{1 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq n-1}$ est une matrice triangulaire inférieure.

Donc $\det((P_j(a_i))_{1 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq n-1} = \prod_{i=1}^{n} P_{i-1}(a_i) = \prod_{j<i}(a_i - a_j)$, ce qui permet de retrouver 1) d).

c) Par n-linéarité par rapport aux colonnes, on obtient $(\lambda_1 ... \lambda_n)\ V_n(a_1, .., a_n)$.

3) On développe le déterminant obtenu selon la ,première ligne (il s'agit en fait d'un déterminant par blocs).

$$\text{On obtient donc } V_n(a_1, a_2, ..., a_n) = \begin{vmatrix} (a_2 - a_1) & a_2(a_2 - a_1) & \cdots & a_2^{n-2}(a_2 - a_1) \\ (a_3 - a_1) & a_3(a_3 - a_1) & \cdots & a_3^{n-2}(a_2 - a_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (a_n - a_1) & a_n(a_n - a_1) & \cdots & a_n^{n-2}(a_n - a_1) \end{vmatrix}.$$

Par n-linéarité par rapport aux lignes, on obtient $(a_2 - a_1)(a_3 - a_1)...(a_n - a_1)V_{n-1}(a_2, ..., a_n)$.