TD n°7. Déterminants.

Exercice A. Matrices compagnons

On considère $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $P_n(x) = \begin{vmatrix} x & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ -1 & x & \ddots & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & -1 & x & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & x+a_{n-1} \end{vmatrix}$.

1) Montrer que $P_n(x) = x^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$ de trois façons :

a) En développant selon la première ligne et par récurrence sur n.

b) En opérant sur les lignes (méthode du pivot) en supposant x non nul.

c) En développant selon la dernière colonne : $P_n(x) = a_0 C_0 + a_1 C_1 + ... + a_{n-2} C_{n-2} + (x + a_{n-1}) C_{n-1}$, avec

$$C_k = (-1)^{n-1-k} \left| \begin{array}{cccc|cccc} x & 0 & 0 & 0 & & & & \\ -1 & \ddots & 0 & \vdots & & O & & \\ 0 & -1 & x & 0 & & & & \\ 0 & 0 & -1 & x & & & & \\ \hline & & & & -1 & x & 0 & 0 \\ & O & & & 0 & -1 & \ddots & 0 \\ & & & & 0 & \ddots & \ddots & x \\ & & & & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right|$$

, avec des blocs diagonaux d'ordres k et $(n-1-k)$.

Exercice B. Déterminant de Van der Monde

1) Pour $(a_1, a_2, ..., a_n) \in K^n$, on définit le déterminant de Van der Monde par

$$V_n(a_1, a_2, ..., a_n) = \det(a_i^{j-1})_{1 \le i \le n, 1 \le j \le n}$$

a) Pour $x \in K$, on pose $P(x) = V_n(a_1, a_2, ..., a_{n-1}, x) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-2} & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-2} & a_2^{n-1} \\ 1 & a_3 & a_3^2 & \cdots & a_3^{n-2} & a_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \cdots & a_{n-1}^{n-2} & a_{n-1}^{n-1} \\ 1 & x & x^2 & \cdots & x^{n-2} & x^{n-1} \end{vmatrix}$

En développant selon une ligne bien choisie, montrer que $P(x)$ est un polynôme en x de degré $\le n-1$.

Préciser le coefficient en x^{n-1} de $P(x)$ en fonction de $V_{n-1}(a_1, a_2, ..., a_{n-1})$.

b) On suppose que $a_1, a_2, ..., a_{n-1}$ sont deux à deux distincts.

Démontrer que les a_j sont racines de P, et en déduire $P(x) = V_{n-1}(a_1, a_2, ..., a_{n-1}) \prod_{k=1}^{n-1}(x - a_k)$.

c) En déduire que (dans tous les cas), on a $V_n(a_1, a_2, ..., a_n) = V_{n-1}(a_1, a_2, ..., a_{n-1}) \prod_{k=1}^{n-1}(a_n - a_k)$.

d) En conclure (par récurrence sur n) que $\boxed{V_n(a_1, a_2, ..., a_n) = \prod_{i<j}(a_j - a_i)}$.

Remarque : En particulier, le déterminant de Van der Monde est non nul ssi $a_1, a_2, ..., a_n$ sont deux à deux distincts.

2) *Déterminants de Van der Monde généralisés*

a) On considère une famille $(P_0, P_1, ..., P_{n-1})$ de polynômes de degrés échelonnés, c'est-à-dire $\boxed{\deg P_j = j}$.

Soient $a_1, a_2, ..., a_n \in K$. On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} P_0(a_1) & P_1(a_1) & \cdots & P_{n-1}(a_1) \\ P_0(a_2) & P_1(a_2) & & P_{n-1}(a_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_0(a_n) & P_1(a_n) & \cdots & P_{n-1}(a_n) \end{pmatrix} = (P_j(a_i))_{1\leq i\leq n, 0\leq j\leq n-1}$$

Remarque : Ainsi, le déterminant de Van der Monde correspond au cas où $P_j = X^j$.

On suppose de plus que les P_j sont unitaires. Montrer que $\det M = V_n(a_1, a_2, ..., a_n)$.

b) En choisissant judicieusement les P_j retrouver l'expression de $V_n(a_1, a_2, ..., a_n)$.

c) On reprend les notations de a), avec $\deg P_j = j$, mais on ne suppose plus les P_j unitaires.

Pour tout $j \in \{0, 1, ..., n-1\}$, on note λ_j le coefficient dominant de P_j.

Exprimer $\det M$ en fonction de $V_n(a_1, a_2, ..., a_n)$ et des λ_j.

3) On utilise les opérations sur les colonnes de la matrice de Van der Monde $M = (a_i^{j-1})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n}$.

Pour tout $j \in \{n, n-1, ..., 2\}$, on retranche à la colonne M_j la matrice M_{j-1} multipliée par a_1.

On obtient ainsi $V_n(a_1, a_2, ..., a_n) == \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & (a_2 - a_1) & a_2(a_2 - a_1) & \cdots & a_2^{n-2}(a_2 - a_1) \\ 1 & (a_3 - a_1) & a_3(a_3 - a_1) & \cdots & a_3^{n-2}(a_2 - a_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & (a_n - a_1) & a_n(a_n - a_1) & \cdots & a_n^{n-2}(a_n - a_1) \end{vmatrix}$.

En déduire $V_n(a_1, a_2, ..., a_n) = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)...(a_n - a_1)V_{n-1}(a_2, a_3, ..., a_n)$.

Exercice C. Un exercice d'oral

1) Soit une famille $(a_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n}$ de réels.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on considère le déterminant $d_n(x) = \det(a_{ij} + x)_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n}$.

Montrer que $d_n(x)$ est un polynôme en x de degré ≤ 1 (c'est-à-dire une fonction affine en x).

2) Soient a et $b \in \mathbb{R}$.

Calculer $d_n(x) = \begin{vmatrix} x & x-b & x-b & x-b & x-b \\ x-a & x & x-b & \ddots & x-b \\ x-a & x-a & x & x-b & x-b \\ x-a & \ddots & x-a & \ddots & x-b \\ x-a & x-a & x-a & x-a & x \end{vmatrix}$. En déduire la valeur de $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & b & b & b & b \\ a & 0 & b & \ddots & b \\ a & a & 0 & b & b \\ a & \ddots & a & \ddots & b \\ a & a & a & a & 0 \end{vmatrix}$.

Indications :

1) Retrancher la première colonne aux autres colonnes, puis développer suivant la première colonne.

Variante : On considère le vecteur $F = (1, 1, ..., 1) \in K^n$. On a ainsi $d(x) = \det(xF + A_1, xF + A_2, ..., xF + A_n)$.
Développer par n-linéarité en notant que tous les det contenant au moins deux F sont nuls (il reste $n+1$ termes).

2) Noter que la valeur de d en a et en b est évidente.

En déduire avec 1) que si $a \neq b$, d est la fonction affine d'interpolation de $x \longmapsto x^n$ en a et en b.

D'où $d(x) = a^n + \dfrac{b^n - a^n}{b - a}(x - a)$ si $a \neq b$, et par continuité, $d(x) = a^n + na^{n-1}(x - a)$ lorsque $b = a$.

Justifier que $\Delta = (-1)^n d(0)$ pour conclure.