TD n°6. Intégrales paramétrées.Corrigé

Exercice A

1) - On applique l'inégalité des accroissement finis : $\forall t \geq 0,\ 1-\cos t \leq t\ \sup(|\cos'|) = t$.

Ainsi $\forall t > 0$, $\left(\dfrac{1-\cos t}{t}\right) \leq 1$. Donc $\sup_{t>0}\left(\dfrac{1-\cos t}{t}\right)$ existe et est ≤ 1.

- On applique l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 : $\forall t \geq 0,\ \ 1-\cos t \leq \frac{1}{2}t^2\ \sup(|\cos''|) = \frac{1}{2}t^2$.
Ainsi $\forall t > 0$, $\left(\dfrac{1-\cos t}{t^2}\right) \leq \dfrac{1}{2}$. Comme $\lim_{t\to 0}\left(\dfrac{1-\cos t}{t^2}\right) = \dfrac{1}{2}$, alors $\dfrac{1}{2}$ est la borne sup.

Remarque : Toute fonction continue sur $]0,+\infty[$ et convergeant en 0^+ et en $+\infty$ est nécessairement bornée. D'où on retrouve l'existence des bornes sup.

2) On pose $\forall x \in [0,+\infty[\times]0,+\infty[$, $g(x,t) = \dfrac{1-\cos t}{t^2}\ e^{-xt}$.

- Pour tout $t > 0$, l'application $x \longmapsto g(x,t)$ est continue.

- On a $1-\cos t \sim \frac{1}{2}t^2$ en $t=0$ et $1-\cos t = O_{+\infty}(1)$. Donc $g(x,t) \sim_{t=0} \frac{1}{2}$ et $g(x,t) = O_{t=+\infty}(e^{-xt})$.

Pour tout $x \geq 0$, $t \longmapsto g(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

- Propriété de domination : $\forall x \in [0,+\infty[$, $|g(x,t)| \leq \varphi(t) = \frac{1-\cos t}{t^2}$ qui est intégrable sur $]0,+\infty[$.

On en déduit que f est continue sur $[0,+\infty[$.

3) - Pour tout $t > 0$, l'application $x \longmapsto g(x,t)$ est de classe C^∞, et

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = -\frac{1-\cos t}{t}\ e^{-xt} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t) = (1-\cos t)\ e^{-xt}$$

- Pour tout $x > 0$, $t \longmapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ et $t \longmapsto \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)$ sont intégrables sur $]0,+\infty[$.

- Propriété de domination : Pour $a > 0$, on a $\forall x \in [a,+\infty[$,

$$\begin{cases} \left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leq \varphi_1(t) = e^{-at} \text{ qui est intégrable sur }]0,+\infty[\\ \left|\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)\right| \leq \varphi_2(t) = 2e^{-at} \text{ qui est intégrable sur }]0,+\infty[\end{cases}$$

On en déduit que f est de classe C^2 sur $[0,+\infty[$, et que $\forall x > 0$, $f''(x) = \int_0^{+\infty}(1-\cos t)e^{-xt}$.
Or, $\int_0^{+\infty}(1-e^{it})e^{-xt}\ dt = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x-i}$, donc $f''(x) = \mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x-i}\right) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{1+x^2}$.

4) On pourrait utiliser la convergence dominée. Mais une majoration directe convient et on conclut par pincement : $|f(x)| \leq \int_0^{+\infty} \dfrac{1}{2}e^{-xt}\ dt = \dfrac{1}{2x}$ et $|f'(x)| \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt}\ dt \leq \dfrac{1}{x}$.

5) $\int \ln x = x\ln x - x + K$ et $\int \ln(x^2+1)\ dx = x\ln(x^2+1) - 2\int \dfrac{x^2}{x^2+1}\ dx$.

Comme $\dfrac{x^2}{x^2+1} = 1 - \dfrac{1}{x^2+1}$, on obtient $\int \ln(x^2+1)\ dx = x\ln(x^2+1) - 2x + 2\arctan x + K$.

6) On sait par 1) que f est continue en 0.

Par la formule admise au 4), on obtient donc $f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = \dfrac{\pi}{2}$.

Exercice B

1) On a $f_n(x) = \dfrac{x-1}{x^n-1}$ si $x \neq 1$, et $f(1) = n$. Donc $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1-x \text{ si } x \in [0,1] \\ 0 \text{ si } x > 1 \end{cases}$

2) a) Pour I_n, on utilise la domination : $0 \leq f_n(x) \leq 1 = \varphi(x)$, avec φ intégrable sur $[0,1]$.

Donc $\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_0^1 (1-x)\ dx = \frac{1}{2}$.

b) Pour J_n, on utilise la domination : $\forall n \geq 3$, $0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{1+x+x^2} = \varphi(x)$, avec φ intégrable sur $[1, +\infty[$.

Donc $\lim_{n\to+\infty} J_n = \int_1^{+\infty} 0\ dx = 0$.

3) a) En utilisant le changement de variable $x = 1 + \dfrac{u}{n}$, on a $J_n = \dfrac{1}{n} \int_0^{+\infty} \dfrac{u}{(1+\frac{u}{n})^n - 1} du$.

On pose $K_n = \int_0^{+\infty} g_n(u)\ du$, avec $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall u \in [0, +\infty[$, $g_n(u) = \dfrac{u}{(1+\frac{u}{n})^n - 1}$.

On a $\forall u \in]0, +\infty[$, $\lim_{n\to+\infty} g_n(u) = \dfrac{u}{e^u - 1}$.

La difficulté est de trouver une fonction de domination :

On utilise $(1+\frac{u}{n})^n - 1 = n(\frac{u}{n}) + \frac{n(n-1)}{2}(\frac{u}{n})^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}(\frac{u}{n})^3 \geq u + \frac{1}{12}u^3$ pour n assez grand.

Or, $\varphi(u) = \dfrac{u}{u + \frac{1}{12}u^3} = \dfrac{1}{1 + \frac{1}{12}u^2}$ et φ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

la fonction de domination $g_n(u) \leq \frac{n(n-1)}{2}(\frac{u}{n})^2$. Donc $\lim_{n\to+\infty} K_n = \lambda$, avec $\lambda = \int_0^{+\infty} \dfrac{u}{e^u - 1}\ du$.

b) On a $\dfrac{u}{e^u - 1} = ue^{-u} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nu} = \sum_{n=1}^{+\infty} ue^{-nu}$. On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^{+\infty} ue^{-nu}\ du = \dfrac{1}{n^2}$. Et $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge.

On obtient alors par le théorème ITT, $\int_0^{+\infty} \dfrac{u}{e^u - 1}\ du = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} ue^{-nu}\ du = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$.