TD n°6. Intégrales paramétrées

Exercice A. Calcul de l'intégrale de Dirichlet. On pose $\boxed{f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\, e^{-xt}\, dt}$.

1) Justifier que $\sup_{t>0} \left(\frac{1-\cos t}{t} \right) \leq 1$ et que $\sup_{t>0} \left(\frac{1-\cos t}{t^2} \right) = \frac{1}{2}$.

2) Montrer que f est définie et continue sur $[0, +\infty[$.

3) Montrer que f est de classe C^2 sur $]0, +\infty[$, et que $\forall x > 0,\ f''(x) = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}$.

4) Montrer que f et f' convergent vers 0 en $+\infty$.

5) Déterminer les primitives sur $]0, +\infty[$ des fonctions $x \longmapsto \ln x$ et $x \longmapsto \ln(x^2+1)$.

On en déduit (*admis ici*) que $\forall x > 0,\ f(x) = x \ln x - \frac{1}{2} x \ln(x^2+1) - \arctan x + \frac{\pi}{2}$.

6) Déduire des questions précédentes que $\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\, dt = \frac{\pi}{2}$.

Exercice B.

1) Pour $x \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = \frac{1}{1+x+...+x^{n-1}}$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1-x \text{ si } x \in [0,1] \\ 0 \text{ si } x > 1 \end{cases}$

2) On pose $\boxed{I_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x+x^2+...+x^n}}$ et $\boxed{J_n = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x+x^2+...+x^{n-1}}}$.

Déterminer $\lim_{n\to+\infty} I_n$ et $\lim_{n\to+\infty} J_n$.

3) a) (★) En utilisant le changement de variable $x = 1 + \frac{u}{n}$, montrer que $J_n \sim \frac{\lambda}{n^2}$, où $\lambda = \int_0^{+\infty} \frac{u}{e^u - 1}\, du$.

b) Calculer λ. On rappelle que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.