

## TD n°6. Formes linéaires. Corrigé

### Exercice A. Formes linéaires sur $\mathcal{M}_n(K)$

1. On a  $\text{tr}(AB) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{ji} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij}b_{ji} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n b_{ji}a_{ij} = \text{tr}(BA)$ .

2. Supposons que  $\varphi$  vérifie  $\varphi(MN) = \varphi(NM)$ .

On a alors en particulier  $\varphi(E_{ij}E_{jk}) = \varphi(E_{jk}E_{ij})$ , c'est-à-dire  $\varphi(E_{ik}) = \varphi(\delta_{ik}E_{jj}) = \delta_{ik}\varphi(E_{jj})$ .

En prenant  $k = i$ , on obtient  $\varphi(E_{ii}) = \varphi(E_{jj})$ . Donc il existe  $\lambda$  tel que  $\varphi(E_{ii}) = \lambda$  pour tout  $i$ .

En prenant  $k \neq i$ , on obtient  $\varphi(E_{ik}) = 0$ .

D'où  $\varphi(M) = (\sum_i \sum_j m_{ij}E_{ij}) = \lambda \sum_i m_{ii} = \lambda \text{tr}(M)$ . Ainsi,  $\varphi = \lambda \text{tr}$ .

La réciproque est connue, puisqu'on sait que  $\text{tr}(MN) = \text{tr}(NM)$ .

### Exercice B. Quadrature par interpolation

1. *Première preuve :*

Comme  $\dim \mathcal{L}(E_n, \mathbb{R}) = \dim E_n = n + 1$ , il suffit de prouver que  $(\varphi_0, \dots, \varphi_n)$  est libre.

Supposons  $\sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_i = 0$ .

En prenant les polynôme de Lagrange  $Q_0, \dots, Q_n$ , on a  $\lambda_j = (\sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_i)(Q_j) = 0$ .

*Seconde preuve :*

La matrice de  $\varphi_i$  dans la base  $\mathcal{B} = (1, X; \dots; X^n)$  est la matrice ligne  $L_i = (1 \ x_i \ x_i^2 \ \dots \ x_i^n)$ .

La matrice de van der Monde  $(x_i^{j-1})_{1 \leq j \leq n, 0 \leq i \leq n}$  est inversible

Donc la famille  $(L_0, \dots, L_n)$  est une base de l'espace des matrices lignes.

Donc  $(\varphi_0, \dots, \varphi_n)$  est une base (car l'application qui à  $\varphi$  associe  $L$  est un isomorphisme).

2. *Première preuve :* Les polynômes de Lagrange forment une base de  $E_n$ , et on a  $P(x) = \sum_{i=0}^n P(x_i)Q_i(x)$ .

Donc, par linéarité de  $P$ ,  $\phi(P) = \sum_{i=0}^n \lambda_i P(x_i)$ , avec  $\lambda_i = \phi(P_i)$ . D'où l'existence.

Réciproquement, supposons  $\phi(P) = \sum_{i=0}^n \lambda_i P(x_i)$ . En prenant  $P = P_i$ , on retrouve  $\lambda_i = L(P_i)$ . D'où l'unicité.

*Seconde preuve :* On utilise 1) :  $(\varphi_0, \dots, \varphi_n)$  est une base de l'espace des formes linéaires sur  $E_n$ .

Ainsi la forme linéaire  $\phi$  se décompose de façon unique comme combinaison linéaire des  $\varphi_i$ .

3. a) Considérons  $\psi(P) = \sum_{i=0}^n \lambda_{n-i} P(x_i)$ , et on va montrer que  $\phi(P) = \psi(P)$ , ce qui par unicité de la représentation, permet d'en déduire  $\lambda_{n-i} = \lambda_i$ .

On a  $\psi(P) = \sum_{i=0}^n \lambda_{n-i} P(x_i) = \sum_{i=0}^n \lambda_i P(x_{n-i}) = \sum_{i=0}^n \lambda_i P(-x_i) = \sum_{i=0}^n \lambda_i Q(x_i)$ , où  $Q(x) = P(-x)$ .

On a donc  $\psi(P) = \phi(Q) = \int_{-1}^1 Q(x) dx$ . Or,  $\int_{-1}^1 Q(x) dx = \int_{-1}^1 P(x) dx$ . D'où le résultat.

b) On veut montrer que  $\int_{-1}^1 P(x) dx = \sum_{i=0}^n \lambda_i P(x_i)$  est vraie pour tout  $P \in E_{n+1}$ .

La propriété est vraie pour tout  $P \in E_n$ .

Donc, par linéarité des deux membres, il suffit de vérifier la linéarité pour  $P(x) = x^{n+1}$ .

Or, on a  $\int_{-1}^1 x^{n+1} dx = 0$ , car  $n$  est impair.

Donc il suffit de vérifier que pour  $P(x) = x^{n+1}$ , on a  $\sum_{i=0}^n \lambda_i P(x_i) = 0$ .

Or,  $P$  est impair,  $\sum_{i=0}^n \lambda_i P(x_i) = \sum_{i=0}^n \lambda_{n-i} P(x_{n-i}) = \sum_{i=0}^n \lambda_{n-i} P(-x_i) = -\sum_{i=0}^n \lambda_{n-i} P(x_i) = -\sum_{i=0}^n \lambda_i P(x_i)$ .

D'où le résultat.