TD n°6 bis. Formes linéaires

Exercice A. Formes linéaires sur $\mathcal{M}_n(K)$

1. Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(K)$. Montrer que $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

2. Montrer que les seules formes linéaires φ sur $\mathcal{M}_n(K)$ vérifiant $\varphi(MN) = \varphi(NM)$ sont les $\lambda\,\mathrm{tr}$.

Indication : Considérer les matrices E_{ij} de la base canonique de $\mathcal{M}_n(K)$.

Par bilinéarité de $(M, N) \longmapsto \varphi(MN)$, il suffit d'avoir les propriétés lorsque M et N sont des E_{ij}.

On rappelle par ailleurs que $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$.

Exercice B. Quadrature par interpolation (*inspiré sujet écrit X 1999*)

On note E_n l'espace vectoriel des fonctions polynomiales réelles de degré $\leq n$.

On considère la forme linéaire L définie sur E_n par $\forall P \in E_n$, $\phi(P) = \int_{-1}^{1} P(x)\ dx$.

On considère des nombres réels $(x_i)_{0\leq i\leq n}$ tels que $-1 \leq x_0 < x_1 < ... < x_n \leq 1$.

On note $Q_0, ..., Q_n$ les polynômes de Lagrange associés aux réels $x_0, x_1, ..., x_n$.

1. Pour tout $0 \leq i \leq n$, on considère $\varphi_i : E_n \to \mathbb{R}\quad P \longmapsto P(x_i)$.

Montrer que $(\varphi_0, ..., \varphi_n)$ est une base de l'ev $\mathcal{L}(E_n, \mathbb{R})$ des formes linéaires sur E_n.

2. Montrer qu'il existe une unique famille $(\lambda_0, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ telle que

$$\forall P \in E_n, \quad \phi(P) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i P(x_i)$$

On pourra proposer *deux preuves*, l'une utilisant 1), et l'autre avec les polynômes de Lagrange.

3. On suppose que $x_{n-i} = -x_i$ pour tout $\in \{0, 1, ..., n\}$.

a) Montrer que $\lambda_{n-i} = \lambda_i$.

b) En déduire que si n est pair, toute fonction polynomiale $P \in E_{n+1}$ vérifie $\int_{-1}^{1} P(x)\ dx = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i P(x_i)$.

4. *Question supplémentaire.* Soit f une fonction réelle de classe C^{n+1} sur l'intervalle $[-1, 1]$.

On pose $M_{n+1} = \sup_{x\in[-1,1]} \left|f^{(n+1)}(x)\right|$, où $f^{(n+1)}$ désigne la dérivée $(n + 1)$-ième de f.

Déterminer des réels positifs α et β indépendants de f tels que

$$\left|\int_{-1}^{1} f(x)\ dx - \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f(x_i)\right| \leq M_{n+1}\left(\alpha + \beta \sum_{i=0}^{n} |\lambda_i|\right)$$