TD n°5. Corrigé

1) On a $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right) = e\exp\left(-\dfrac{1}{2n}+O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right) = e - \dfrac{e}{2n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Donc $a_n = \dfrac{(-1)^n e}{2n} + \varepsilon_n$, avec $\boxed{\varepsilon_n = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)}$. Donc $\sum a_n$ cv comme somme de séries convergentes.

2) Exemple : $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} + \dfrac{(-1)^n}{n}$.

3) Avec $a_n = \exp(-\sqrt{\ln n})$, on a $na_n = \exp(\ln n - \sqrt{\ln n}) \to +\infty$.

Donc $a_n \geq \dfrac{1}{n}$ pour n assez grand. Et $\sum a_n$ diverge.

4) $(-1)^{n(n-1)/2}$ vaut 1 ssi 4 divise $n(n-1)$, donc ssi $n \equiv 0$ ou 1 modulo 4.

Donc les $(-1)^{n(n-1)/2}$ valent $1, -1, -1, 1, 1, -1, -1, 1, 1, -1, -1, \ldots$

Première méthode :

Pour conclure, on considère la série comme somme des deux séries alternées $\sum a_{2k+1}$ et $\sum a_{2k}$.
En effet, $a_{2k} = \dfrac{(-1)^k}{2k}$ et $a_{2k+1} = \dfrac{(-1)^k}{2k+1}$. Ainsi, les séries $\sum a_{2k+1}$ et $\sum a_{2k}$ vérifient le CSSA.
On conclut avec $\sum_{n=1}^{N} a_n = \sum_{n=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} a_{2k} + \sum_{n=1}^{\lfloor (N-1)/2 \rfloor} a_{2k+1}$.

Seconde méthode :

On a $S_{2n+1} = \sum_{k=1}^{2n+1} a_k = 1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \left(\dfrac{1}{2k} + \dfrac{1}{2k+1}\right)$, donc (S_{2n+1}) converge (par le CSSA).
D'autre part, $S_{2n} - S_{2n+1}$ tend vers 0, donc (S_{2n}) converge vers la même limite. Donc (S_n) converge.

5) a) Posons $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{S_n}$. On a $\lim_{n\to+\infty} S_n = L > 0$, donc $v_n = O(u_{n+1})$ et $\sum v_n$ converge.

b) On a $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$. On a $v_n = \dfrac{S_{n+1} - S_n}{S_n}$.
On a $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{S_n} = \dfrac{S_{n+1}-S_n}{S_n} = \int_{S_n}^{S_{n+1}} \dfrac{dt}{S_n} \geq \int_{S_n}^{S_{n+1}} \dfrac{dt}{t}$.
Donc $\sum_{k=1}^{+\infty} v_n \geq \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{S_n}^{S_{n+1}} \dfrac{dt}{t} = \int_{S_0}^{+\infty} \dfrac{dt}{t} = +\infty$. Donc $\sum v_n$ diverge.
c) Si $S_{n+1} \sim S_n$, alors $\dfrac{u_{n+1}}{S_n} \sim \dfrac{u_{n+1}}{S_{n+1}}$, donc par b), $\sum \dfrac{u_{n+1}}{S_{n+1}}$ diverge, c'est-à-dire $\sum \dfrac{u_n}{S_n}$ diverge.
Sinon, $\dfrac{u_n}{S_n} = \dfrac{S_n - S_{n-1}}{S_n} = 1 - \dfrac{S_{n-1}}{S_n}$ ne converge pas vers 0, donc la série $\sum \dfrac{u_n}{S_n}$ diverge.

6) a) On pourrait comparer avec une intégrale, mais un encadrement grossier suffit.

Il y a $(p+1)^2 - p^2 = 2p+1$ termes dans la somme.
On a donc $\dfrac{2p+1}{p^2} \leq u_p \leq \dfrac{2p+1}{(p+1)^2}$. Les deux encadrants sont de la forme $\dfrac{2}{p} + O\left(\dfrac{1}{p^2}\right)$.
b) On a $\lfloor \sqrt{n} \rfloor = p$ ssi $p^2 \leq n \leq (p+1)^2 - 1 = p^2 + 2p$.

Posons $S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{\lfloor \sqrt{k} \rfloor}}{k}$ et $T_p = \sum_{j=1}^{p} (-1)^j u_j$.

Pour $n = (p+1)^2 - 1$, on a (en regroupant) : $S_n = \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=j^2}^{(j+1)^2-1} \dfrac{(-1)^j}{k} = \sum_{j=1}^{p} (-1)^j u_j = T_p$.

Par a), la série $\sum (-1)^p u_p$ cv, comme somme de deux séries cv, car $u_p = \dfrac{2}{p} + O\left(\dfrac{1}{p^2}\right)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, S_n est compris entre T_p et T_{p+1}, où $p = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$. Donc $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.