TD n°5. Séries

1) (*Centrale*) Déterminer la nature de la série $\sum a_n$, où $a_n = (-1)^n \left(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)$.

2) (X) Donner un exemple d'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ positive à partir d'un certain rang,

convergeant vers 0 et telle que $\sum(-1)^n a_n$ diverge.

Indication : Chercher a_n sous la forme $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + (-1)^n u_n$, où $v_n = \mathfrak{o}\,(u_n)$.

3) Déterminer la nature de $\sum \exp(-\sqrt{\ln n})$

Séries alternées

4) (X) Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n(n-1)/2}}{n}$.

Comparaison entre sommes et intégrales

5) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

a) On suppose que $\sum u_n$ converge. Justifier (par un argument très simple) que $\sum \frac{u_n}{S_n}$ converge.

b) On suppose que $\sum u_n$ diverge vers $+\infty$. Montrer que $\sum \frac{u_{n+1}}{S_n}$ diverge.

Indication : Comparer $\frac{u_{n+1}}{S_n}$ avec $\int_{S_n}^{S_{n+1}} \frac{dt}{t}$.

c) (★) On suppose à nouveau que $\sum u_n$ diverge vers $+\infty$. Montrer que $\sum \frac{u_n}{S_n}$ diverge.

Indication : Traiter d'abord le cas où $S_n \sim S_{n+1}$. Dans le cas contraire, montrer que $\sum \frac{u_n}{S_n}$ diverge "grossièrement".

Étude d'un cas particulier

6) (*ENS*) a) On pose $u_p = \sum_{k=p^2}^{(p+1)^2-1} \frac{1}{k}$. Montrer (par un encadrement) que $u_p = \frac{2}{p} + O\left(\frac{1}{p^2}\right)$.

b) En déduire que $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n}$ converge.