

TD n°5. Formes linéaires. Corrigé

Exercice A. Formes linéaires sur $\mathcal{M}_n(K)$

1. On a $\text{tr}(AB) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ji} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij} b_{ji} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n b_{ji} a_{ij} = \text{tr}(BA)$.

2. Soit $\varphi : \mathcal{M}_n(K) \rightarrow K$ linéaire. On a $\varphi(M) = \varphi(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} E_{ij}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} m_{ij}$, avec $\lambda_{ij} = \varphi(E_{ij})$.

En posant $A = (\lambda_{ji})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$, on a bien $\varphi(M) = \text{tr}(AM)$. Réciproquement, φ est bien linéaire.

3. Supposons que φ vérifie $\varphi(MN) = \varphi(NM)$.

On a alors en particulier $\varphi(E_{ij}E_{jk}) = \varphi(E_{jk}E_{ij})$, c'est-à-dire $\varphi(E_{ik}) = \varphi(\delta_{ik}E_{jj}) = \delta_{ik}\varphi(E_{jj})$.

En prenant $k = i$, on obtient $\varphi(E_{ii}) = \varphi(E_{jj})$. Donc il existe λ tel que $\varphi(E_{ii}) = \lambda$ pour tout i .

En prenant $k \neq i$, on obtient $\varphi(E_{ik}) = 0$.

D'où $\varphi(M) = (\sum_i \sum_j m_{ij} E_{ij}) = \lambda \sum_i m_{ii} = \lambda \text{tr}(M)$. Ainsi, $\varphi = \lambda \text{tr}$.

La réciproque est connue, puisqu'on sait que $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.

Exercice B. Quadrature par interpolation

1. *Première preuve :*

Comme $\dim \mathcal{L}(E_n, \mathbb{R}) = \dim E_n = n + 1$, il suffit de prouver que $(\varphi_0, \dots, \varphi_n)$ est libre.

Supposons $\sum_{i=0}^n \lambda_i \varphi_i = 0$.

En prenant les polynôme de Lagrange $Q_0, \dots, Q_n$, on a $\lambda_j = (\sum_{i=0}^n \lambda_i \varphi_i)(Q_j) = 0$.

Seconde preuve :

La matrice de φ_i dans la base $\mathcal{B} = (1, X; \dots; X^n)$ est la matrice ligne $L_i = (1 \ x_i \ x_i^2 \ \dots \ x_i^n)$.

La matrice de van der Monde $(x_i^{j-1})_{1 \leq j \leq n, 0 \leq i \leq n}$ est inversible

Donc la famille $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de l'espace des matrices lignes.

Donc $(\varphi_0, \dots, \varphi_n)$ est une base (car l'application qui à φ associe L est un isomorphisme).

2. *Première preuve :* Les polynômes de Lagrange forment une base de E_n , et on a $P(x) = \sum_{i=0}^n P(x_i) Q_i(x)$.

Donc, par linéarité de P , $\phi(P) = \sum_{i=0}^n \lambda_i P(x_i)$, avec $\lambda_i = \phi(P_i)$. D'où l'existence.

Réciproquement, supposons $\phi(P) = \sum_{i=0}^n \lambda_i P(x_i)$. En prenant $P = P_i$, on retrouve $\lambda_i = \phi(P_i)$. D'où l'unicité.

Seconde preuve : On utilise 1) : $(\varphi_0, \dots, \varphi_n)$ est une base de l'espace des formes linéaires sur E_n .

Ainsi la forme linéaire ϕ se décompose de façon unique comme combinaison linéaire des φ_i .

3. a) Considérons $\psi(P) = \sum_{i=0}^n \lambda_{n-i} P(x_i)$, et on va montrer que $\phi(P) = \psi(P)$, ce qui par unicité de la représentation, permet d'en déduire $\lambda_{n-i} = \lambda_i$.

On a $\psi(P) = \sum_{i=0}^n \lambda_{n-i} P(x_i) = \sum_{i=0}^n \lambda_i P(x_{n-i}) = \sum_{i=0}^n \lambda_i P(-x_i) = \sum_{i=0}^n \lambda_i Q(x_i)$, où $Q(x) = P(-x)$.

On a donc $\psi(P) = \phi(Q) = \int_{-1}^1 Q(x) dx$. Or, $\int_{-1}^1 Q(x) dx = \int_{-1}^1 P(x) dx$. D'où le résultat.

b) On veut montrer que $\int_{-1}^1 P(x) dx = \sum_{i=0}^n \lambda_i P(x_i)$ est vraie pour tout $P \in E_{n+1}$.

La propriété est vraie pour tout $P \in E_n$.

Donc, par linéarité des deux membres, il suffit de vérifier la linéarité pour $P(x) = x^{n+1}$.

Or, on a $\int_{-1}^1 x^{n+1} dx = 0$, car n est impair.

Donc il suffit de vérifier que pour $P(x) = x^{n+1}$, on a $\sum_{i=0}^n \lambda_i P(x_i) = 0$.

Or, P est impair, $\sum_{i=0}^n \lambda_i P(x_i) = \sum_{i=0}^n \lambda_{n-i} P(x_{n-i}) = \sum_{i=0}^n \lambda_{n-i} P(-x_i) = -\sum_{i=0}^n \lambda_{n-i} P(x_i) = -\sum_{i=0}^n \lambda_i P(x_i)$.

4. On note P_n le polynôme de Taylor d'ordre n de f en 0. Par l'inégalité de Taylor-Lagrange, on a

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x), \text{ avec } |R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} M_{n+1} \text{ pour tout } x \in [-1, 1]$$

Par 3), on a $\int_{-1}^1 P_n(x) dx = \sum_{i=0}^n \lambda_i P_n(x_i)$, car $\deg P_n \leq n$.

$$\text{Donc } \left| \int_{-1}^1 f(x) dx - \sum_{i=0}^n \lambda_i f(x_i) \right| = \left| \int_{-1}^1 R_n(x) dx - \sum_{i=0}^n \lambda_i R_n(x_i) \right|.$$

Il suffit ensuite de majorer via l'inégalité triangulaire :

On obtient $\left| \int_{-1}^1 R_n(x) dx - \sum_{i=0}^n \lambda_i R_n(x_i) \right| \leq M_{n+1} (\alpha + \beta \sum_{i=0}^n |\lambda_i|)$, avec

$$\alpha = \int_{-1}^1 \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} dx = \frac{2}{(n+2)!} \text{ et } \beta = \max_{0 \leq i \leq n} \frac{|x_i|^{n+1}}{(n+1)!}$$