

TD n°4. Séries. Corrigé

1) On a $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) = e \exp\left(-\frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = e - \frac{e}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Donc $a_n = \frac{(-1)^n e}{2n} + \varepsilon_n$, avec $\varepsilon_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Donc $\sum a_n$ cv comme somme de séries convergentes.

2) Exemple : $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^n}{n}$.

3) Avec $a_n = \exp(-\sqrt{\ln n})$, on a $na_n = \exp(\ln n - \sqrt{\ln n}) \rightarrow +\infty$.

Donc $a_n \geq \frac{1}{n}$ pour n assez grand. Et $\sum a_n$ diverge.

4) $(-1)^{n(n-1)/2}$ vaut 1 ssi 4 divise $n(n-1)$, donc ssi $n \equiv 0$ ou 1 modulo 4.

Donc les $(-1)^{n(n-1)/2}$ valent 1, -1, -1, 1, 1, -1, -1, 1, 1, -1, -1, ...

Première méthode :

Pour conclure, on considère la série comme somme des deux séries alternées $\sum a_{2k+1}$ et $\sum a_{2k}$.

En effet, $a_{2k} = \frac{(-1)^k}{2k}$ et $a_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{2k+1}$. Ainsi, les séries $\sum a_{2k+1}$ et $\sum a_{2k}$ vérifient le CSSA.

On conclut avec $\sum_{n=1}^N a_n = \sum_{n=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} a_{2k} + \sum_{n=1}^{\lfloor (N-1)/2 \rfloor} a_{2k+1}$.

Seconde méthode :

On a $S_{2n+1} = \sum_{k=1}^{2n+1} a_k = 1 + \sum_{k=1}^n (-1)^k \left(\frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} \right)$, donc (S_{2n+1}) converge (par le CSSA).

D'autre part, $S_{2n} - S_{2n+1}$ tend vers 0, donc (S_{2n}) converge vers la même limite. Donc (S_n) converge.

5) a) Posons $v_n = \frac{u_{n+1}}{S_n}$. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = L > 0$, donc $v_n = O(u_{n+1})$ et $\sum v_n$ converge.

b) On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$. On a $v_n = \frac{S_{n+1} - S_n}{S_n}$.

$$\text{On a } v_n = \frac{u_{n+1}}{S_n} = \frac{S_{n+1} - S_n}{S_n} = \int_{S_n}^{S_{n+1}} \frac{dt}{S_n} \geq \int_{S_n}^{S_{n+1}} \frac{dt}{t}.$$

Donc $\sum_{k=1}^{+\infty} v_n \geq \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{S_n}^{S_{n+1}} \frac{dt}{t} = \int_{S_0}^{+\infty} \frac{dt}{t} = +\infty$. Donc $\sum v_n$ diverge.

c) Si $S_{n+1} \sim S_n$, alors $\frac{u_{n+1}}{S_n} \sim \frac{u_{n+1}}{S_{n+1}}$, donc par b), $\sum \frac{u_{n+1}}{S_{n+1}}$ diverge, c'est-à-dire $\sum \frac{u_n}{S_n}$ diverge.

Sinon, $\frac{u_n}{S_n} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n} = 1 - \frac{S_{n-1}}{S_n}$ ne converge pas vers 0, donc la série $\sum \frac{u_n}{S_n}$ diverge.

6) a) On pourrait comparer avec une intégrale, mais un encadrement grossier suffit.

Il y a $(p+1)^2 - p^2 = 2p+1$ termes dans la somme.

On a donc $\frac{2p+1}{p^2} \leq u_p \leq \frac{2p+1}{(p+1)^2}$. Les deux encadrants sont de la forme $\frac{2}{p} + O\left(\frac{1}{p^2}\right)$.

b) On a $\lfloor \sqrt{n} \rfloor = p$ ssi $p^2 \leq n \leq (p+1)^2 - 1 = p^2 + 2p$.

Posons $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{k} \rfloor}}{k}$ et $T_p = \sum_{j=1}^p (-1)^j u_j$.

Pour $n = (p+1)^2 - 1$, on a (en regroupant) : $S_n = \sum_{j=1}^p \sum_{k=j^2}^{(j+1)^2-1} \frac{(-1)^j}{k} = \sum_{j=1}^p (-1)^j u_j = T_p$.

Par a), la série $\sum (-1)^p u_p$ cv, comme somme de deux séries cv, car $u_p = \frac{2}{p} + O\left(\frac{1}{p^2}\right)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, S_n est compris entre T_p et T_{p+1} , où $p = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$. Donc $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.