TD n°4. Corrigé

1) On a $f(t)=\dfrac{1}{t^x(t-1)^y}\sim_1 \dfrac{1}{(t-1)^y}$ et $f(t)\sim_{+\infty}\dfrac{1}{t^{x+y}}$. L'intégrale converge ssi $y<1$ et $x+y>1$.

K est donc délimité par les droites $y=1$ et $x+y=1$.

2) a) $\dfrac{\ln x}{x^2+1}=O_{+\infty}\left(\dfrac{1}{x^{3/2}}\right)$, donc $\int_1^{+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2+1}\,dx$ converge.

$\dfrac{\ln x}{x^2+1}\sim\ln x=O\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$, donc $\int_0^1\dfrac{\ln x}{x^2+1}\,dx$ converge.

b) Avec $y=\dfrac{1}{x}$, on a : $\int_0^{+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2+1}\,dx=-\int_{+\infty}^0\dfrac{\ln(1/y)}{(1/y)^2+1}\,\dfrac{dy}{y^2}=-\int_0^{+\infty}\dfrac{\ln y}{y^2+1}\,dy$, donc $\int_0^{+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2+1}\,dx=0$.

3) On a $J=2\int_0^{+\infty}\exp(-t)\cos(t)\,dt=2\,\mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty}\exp(-(1-i)t)\,dt\right)=2\,\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{1-i}\right)=1$.

4) a) A existe car $\ln(\sin t)=\ln(t+\mathfrak{o}\left((t)\right))=\ln t+\mathfrak{o}\left(1\right)=O(\ln t)$ en $t=0^+$.

b) $A=B$ par le changement de variable $t=\frac{\pi}{2}-\theta$. Et $C=\int_0^{\pi/2}\ln\sin+\int_{\pi/2}^{\pi}\ln\sin=2B$.

$A+B=\int_0^{\pi/2}\ln(\frac{1}{2}\sin(2\theta))\,d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\ln(\frac{1}{2}\sin\theta)\,d\theta=\frac{1}{2}C-\frac{\pi}{2}\ln 2$, d'où $C=-\pi\ln 2$ et $A=B=-\frac{\pi}{2}\ln 2$.

5) On note d'abord que Δ se prolonge par continuité en $x=0$ par $\Delta(0)=f'(0)$.

On a alors $\int_0^x\Delta(t)^2\,dt=\left[-\dfrac{f(t)^2}{t}\right]_0^x+\int_\varepsilon^x\dfrac{2f(t)f'(t)}{t}\,dt$, d'où $\int_0^x\Delta(t)^2\,dt=-f(x)\Delta(x)+2\int_0^x f(t)\Delta(t)\,dt$.

Comme $f(x)\Delta(x)\geq 0$, alors $\int_0^x\Delta(t)^2\,dt\leq 2\int_0^x f(t)\Delta(t)\,dt$.

Par Cauchy-Schwarz, on obtient $\int_0^x\Delta(t)^2\,dt\leq 2\int_0^x f(t)\Delta(t)\,dt\leq 2(\int_0^x\Delta(t)^2\,dt)^{1/2}(\int_0^{+\infty}f(t)^2\,dt)^{1/2}$

On peut supposer Δ non nulle. D'où $(\int_0^x\Delta(t)^2\,dt)^{1/2}\leq 2(\int_0^{+\infty}f(t)^2\,dt)^{1/2}$.

Donc Δ^2 est intégrable, et $\int_0^{+\infty}\Delta(t)^2\,dt\leq 4\int_0^{+\infty}f(t)^2\,dt$.

6) a) On a $\lim_{n\to+\infty}\int_n^{n+1}f=0$.

Or, par la formule de la moyenne, il existe x_n tel que $f(x_n)=\int_n^{n+1}f$. D'où $\lim_{n\to+\infty}f(x_n)=0$ et $\lim_{n\to+\infty}x_n=+\infty$.

Autre preuve : Pour tout $\varepsilon>0$, on ne peut avoir $f(x)\geq\varepsilon$ pour x assez grand.

Autrement dit, on peut trouver des valeurs de x arbitrairement grandes pour lesquelles $0\leq f(x)<\varepsilon$.

Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}$, il existe x_n tel que $x_n\geq n$ et $f(x_n)=\frac{1}{n+1}$ (on prend ici $\varepsilon=\frac{1}{n+1}$).

On construit ainsi une suite réelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n\to+\infty}x_n=+\infty$ et $\lim_{n\to+\infty}f(x_n)=0$.

b) Soit $x\geq 0$. Comme f est k-lipschitzienne, on a $\forall t\geq x$, $f(x+h)\geq f(x)-kh$.

En considérant l'aire du triangle de hauteur $f(x)$ et de base $\left[x,x+\dfrac{f(x)}{k}\right]$, on a

$$\frac{f(x)^2}{2k}\leq\int_x^{x+h}f(t)\,dt\leq\int_x^{+\infty}f(t)\,dt \text{ donc par pincement, } \lim_{x\to+\infty}f(x)=0.$$

7) a) On a : $\int_{1/n}^1 f(t)\,dt+\dfrac{1}{n}f(1)\leq S_n\leq\int_0^1 f(t)\,dt$.

Comme $\lim_{n\to+\infty}\int_{1/n}^1 f(t)\,dt=\int_0^1 f(t)\,dt$, alors par pincement, $\lim_{n\to+\infty}S_n=\int_0^1 f(t)\,dt$.

b) On applique a) à la fonction $g(t)=-\ln\left(\sin\left(\dfrac{\pi}{2}t\right)\right)$ sur $]0,1]$. On a $A=-\dfrac{\pi}{2}\int_0^1 g(t)\,dt$.

Donc $A=\lim_{n\to+\infty}\dfrac{\pi}{2n}\sum_{k=1}^n\ln\left(\sin\left(\dfrac{k\pi}{2n}\right)\right)$. Or, $\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\dfrac{k\pi}{2n}\right)=\sqrt{\prod_{k=1}^{2n-1}\sin\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)}=\sqrt{\dfrac{2n}{2^{2n-1}}}$.

Donc $A=\lim_{n\to+\infty}\dfrac{\pi}{2n}\ln\left(\sqrt{\dfrac{2n}{2^{2n-1}}}\right)=-\dfrac{\pi}{2}\ln 2$.