TD n°4. Exemples de fonctions intégrables

Calculs d'intégrales

1) On considère K l'ensemble des $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tels que l'intégrale $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{t^x(t-1)^y}\,dt$ converge.

Représenter graphiquement K en hachurant la partie du plan (x,y) correspondante.

2) a) Montrer que $\int_0^{+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2+1}\,dx$ converge.

b) Montrer (à l'aide de $y=\dfrac{1}{x}$) que $\int_0^{+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2+1}\,dx=0$.

3) Calculer $J=\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-|t|)\cos(t)\,dt$.

4) On pose $A=\int_0^{\pi/2}\ln(\sin t)\,dt$, $B=\int_0^{\pi/2}\ln(\cos t)\,dt$ et $C=\int_0^{\pi}\ln(\sin t)\,dt$.

a) Justifier l'existence de A.

b) Montrer que $A=B=\dfrac{1}{2}C$ et que $A+B=\dfrac{1}{2}C-\dfrac{\pi}{2}\ln 2$. En déduire A,B,C.

Fonctions de carré intégrable

5) (X) Soit $f:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $f(0)=0$. On suppose $(f')^2$ intégrable sur $[0,+\infty[$.

On pose $\Delta : x\longmapsto\dfrac{f(x)}{x}$. Montrer que Δ^2 est intégrable sur $]0,+\infty[$ et que $\int_0^{+\infty}\Delta(x)^2\,dx\le 4\int_0^{+\infty}f'(x)^2\,dx$.

Indication : Justifier l'intégrabilité de Δ^2 en 0. Utiliser IPP + Cauchy-Schwarz pour évaluer $\int_0^x\Delta(t)^2\,dt$.

Propriétés générales des fonctions intégrables

6) Soit $f:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ continue, positive et intégrable. *Les deux questions sont indépendantes.*

a) Montrer qu'il existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n\to+\infty}x_n=+\infty$ et $\lim_{n\to+\infty}f(x_n)=0$.

Indication : Considérer $\lim_{n\to+\infty}\int_n^{n+1}f(t)\,dt$,

ou bien noter que pour tout $\varepsilon>0$, on ne peut avoir $f(x)\ge\varepsilon$ pour x assez grand.

b) (★) On suppose f lipschitzienne de rapport k. Montrer que $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$.

7) a) Soit $f:]0,1]\to\mathbb{R}$ une fonction positive intégrable. On pose $S_n=\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\dfrac{k}{n}\right)$.

On suppose f décroissante. Montrer que $\lim_{n\to+\infty}S_n=\int_0^1 f(t)\,dt$.

b) (★) On admet $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)=\dfrac{n}{2^{n-1}}$. Retrouver la valeur de $A=\int_0^{\pi/2}\ln(\sin x)\,dx$.