TD n°3. Points fixes. Corrigé

Exercice A

1) $]0, x_0]$ est stable par f, donc $\forall x \in \mathbb{N}$, $0 < u_n \leq x_0$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante (car $f \leq \mathrm{Id}$).

La limite $L = \lim_{n\to+\infty} u_n$ existe et $L \in [0, x_0]$ vérifie $f(L) = L$ par continuité de f en L. Donc $L = 0$.

2) a) On a $\left(\dfrac{1}{f(x)} - \dfrac{1}{x}\right) \sim \dfrac{\lambda x^2}{x^2} = \lambda$, car $f(x) \sim x$ et $x - f(x) \sim \lambda x^2$. Donc $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{x_{n+1}} - \dfrac{1}{x_n} = \lambda$.

Par Cesàro, $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\dfrac{1}{x_{k+1}} - \dfrac{1}{x_k}\right) = \lambda$, donc $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\dfrac{1}{x_n} = \lambda$, c'est-à-dire $x_n \sim \dfrac{1}{\lambda n}$ (car $\lambda \neq 0$).

Exercice B

1) a) Comme $\lim_{x\to a, x\neq a} \left|\dfrac{f(x) - a}{x - a}\right| = |f'(a)| < k$, alors au voisinage de a privé de a, on a $\left|\dfrac{f(x) - a}{x - a}\right| \leq k$.

Donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\forall x \in V = [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$, $|f(x) - a| \leq k\,|x - a|$.

Variante : Comme f' continue, on a $f'(x) < k$ sur un voisinage $V = [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$.

Par l'IAF, l'application f est k-lipschitzienne sur V, et donc a fortiori $|f(x) - a| \leq k\,|x - a|$.

b) On a $k \leq 1$. Pour tout $x \in V$, on a $|f(x) - a| \leq k\alpha \leq \alpha$, donc $\boxed{V \text{ est stable par } f}$.

Si $r_0 \leq \varepsilon$, c'est-à-dire $u_0 \in V$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in V$, et on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $r_{n+1} \leq k r_n$, d'où $\forall n \in \mathbb{N}$, $r_n \leq k^n r_0$.

c) Soit $x \in \Omega$. On a donc $\lim_{n\to+\infty} u_n(x) = a$. Pour n assez grand, on a $u_n(x) \in]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$.

On en déduit que pour y assez proche de a, on a encore $u_n(y) \in]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$, car u_n est continue.

Par b), on en déduit qu'on a alors $\lim_{n\to+\infty} u_n(y) = a$, c'est-à-dire $y \in \Omega$. Donc Ω est ouvert.

2) Supposons par l'absurde que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq a$.

(en effet, s'il existe p tel que $u_p = a$, alors $\forall n \geq p$, $u_n = a$).

On a $\lim_{x\to a, x\neq a} \left|\dfrac{f(x) - a}{x - a}\right| = |f'(a)| > 1$, alors $\left|\dfrac{u_{n+1} - a}{u_n - a}\right| > 1$ pour n assez grand, ce qui contredit $\lim_{n\to+\infty} u_n = a$.

3) *Remarque* : On a $f'(a) = -2a$ et on vérifie aiément que $a > \frac{1}{2}$, donc $f'(a) < -1$.

a) On a $u_{2n+2} = g(u_{2n})$ et g est croissante (car f décroissante).

Donc $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone : si $u_0 \leq u_2$, alors $g^{(n)}(u_0) \leq g^{(n)}(u_2)$, c'est-à-dire $u_{2n} \leq u_{2n+2}$.

De même si $u_0 \leq u_2$.

On procède de même avec $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, car $u_{2n+1} = g(u_{2n-1})$.

b) On a $f([0, a[) =]a, 1]$ et $f(]a, 1]) = [0, a[$, donc $g([0, a[) = [0, a[$.

On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_{2n} < a$.

On a aussi $g(x) - x \leq 0$ pour tout $x \in [0, a[$. Donc $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Elle converge vers L vérifiant $0 \leq L \leq u_0 < a$, donc $L = 0$.

Comme $u_{2n+1} = f(u_{2n})$, alors $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et converge vers $f(0) = 1$.