TD n°3. Points fixes

Exercice A. Etude asymptotique des suites récurrentes à convergence lente

Soit $f : [0, x_0] \to [0, x_0]$ de classe C^2 telle que $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ et $\forall x \in]0, x_0]$, $0 < f(x) < x$.

On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in]0, x_0]$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

1) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0^+$.

2) On suppose $f(x) = x - \lambda x^2 + \mathfrak{o}\left(x^2\right)$, avec $\lambda > 0$.

Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n} = \lambda$. En déduire avec Cesàro que $u_n \sim \dfrac{1}{\lambda n}$.

Exercice B. Points fixes fortement attractifs et fortement répulsifs

Soient I un intervalle ouvert, $f : I \to I$ une application de classe C^1, et a un point fixe de f.

On considère $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$. On pose $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ r_n = |u_n - a|}$.

1) On suppose $\boxed{|f'(a)| < 1}$. On dit alors que a est un point fixe (fortement) attractif.

Soit un réel k tel que $|f'(a)| < k < 1$.

a) Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\forall x \in [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$, $|f(x) - f(a)| \leq k\,|x - a|$.

On considère désormais le voisinage $V = [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$.

b) En déduire que V est stable et que si $r_0 < \varepsilon$, alors $\forall n \in \mathbb{N},\ r_n \leq k^n r_0$.

Remarque : En particulier, comme on a $k < 1$, on a $\lim_{n\to+\infty} r_n = 0$, c'est-à-dire $\lim_{n\to+\infty} u_n = a$.

Terminologie : La convergence est dite *sous-exponentielle* (ou infra-géométrique).

c) ($\bigstar$) On note $u_n(x)$ pour signifier que u_n dépend de $u_0 = x$.

Montrer que $\Omega = \{x \in I \mid \lim_{n\to+\infty} u_n(x) = a\}$ est un ouvert.

Indication : Noter que $x \longmapsto u_n(x)$ est continue.

2) On suppose $\boxed{|f'(a)| > 1}$. On suppose $\lim_{n\to+\infty} u_n = a$.

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire en a.

Indication : Par l'absurde et considérer $\lim_{n\to+\infty} \left|\dfrac{u_{n+1} - a}{u_n - a}\right|$

3) *Exemple de point fixe répulsif.*

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_{n+1} = 1 - u_n^2$. On pose $f : [0, 1] \to [0, 1]\quad x \longmapsto 1 - x^2$.

On note a le point fixe de f. On vérifie aisément (admis ici) que $|f'(a)| > 1$.

a) On pose $g = f \circ f$. Justifier que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones.

b) On admet $g(x) - x = x(1 - x)(x - f(x))$. On suppose $0 \leq u_0 < a$.

Montrer que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent et préciser leurs limites.