

TD n°3. Corrigé

1) On a $f(t) = \frac{1}{t^x(t-1)^y} \sim_1 \frac{1}{(t-1)^y}$ et $f(t) \sim_{+\infty} \frac{1}{t^{x+y}}$. L'intégrale converge ssi $y < 1$ et $x+y > 1$.

K est donc délimité par les droites $y = 1$ et $x + y = 1$.

2) a) $\frac{\ln x}{x^2+1} = O_{+\infty} \left(\frac{1}{x^{3/2}} \right)$, donc $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+1} dx$ converge.

$\frac{\ln x}{x^2+1} \sim \ln x = O \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right)$, donc $\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2+1} dx$ converge.

b) Avec $y = \frac{1}{x}$, on a : $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+1} dx = - \int_{+\infty}^0 \frac{\ln(1/y)}{(1/y)^2+1} \frac{dy}{y^2} = - \int_0^{+\infty} \frac{\ln y}{y^2+1} dy$, donc $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+1} dx = 0$.

3) On a $J = 2 \int_0^{+\infty} \exp(-t) \cos(t) dt = 2 \operatorname{Re} \left(\int_0^{+\infty} \exp(-(1-i)t) dt \right) = 2 \operatorname{Re} \left(\frac{1}{1-i} \right) = 1$.

4) a) A existe car $\ln(\sin t) = \ln(t + o((t))) = \ln t + o(1) = O(\ln t)$ en $t = 0^+$.

b) $A = B$ par le changement de variable $t = \frac{\pi}{2} - \theta$. Et $C = \int_0^{\pi/2} \ln \sin + \int_{\pi/2}^{\pi} \ln \sin = 2B$.

$A + B = \int_0^{\pi/2} \ln(\frac{1}{2} \sin(2\theta)) d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \ln(\frac{1}{2} \sin \theta) d\theta = \frac{1}{2} C - \frac{\pi}{2} \ln 2$, d'où $C = -\pi \ln 2$ et $A = B = -\frac{\pi}{2} \ln 2$.

5) On note d'abord que Δ se prolonge par continuité en $x = 0$ par $\Delta(0) = f'(0)$.

On a alors $\int_0^x \Delta(t)^2 dt = \left[-\frac{f(t)^2}{t} \right]_0^x + \int_{\varepsilon}^x \frac{2f(t)f'(t)}{t} dt$, d'où $\int_0^x \Delta(t)^2 dt = -f(x)\Delta(x) + 2 \int_0^x f(t)\Delta(t) dt$.

Comme $f(x)\Delta(x) \geq 0$, alors $\int_0^x \Delta(t)^2 dt \leq 2 \int_0^x f(t)\Delta(t) dt$.

Par Cauchy-Schwarz, on obtient $\int_0^x \Delta(t)^2 dt \leq 2 \int_0^x f(t)\Delta(t) dt \leq 2(\int_0^x \Delta(t)^2 dt)^{1/2} (\int_0^{+\infty} f(t)^2 dt)^{1/2}$

On peut supposer Δ non nulle. D'où $(\int_0^x \Delta(t)^2 dt)^{1/2} \leq 2(\int_0^{+\infty} f(t)^2 dt)^{1/2}$.

Donc Δ^2 est intégrable, et $\int_0^{+\infty} \Delta(t)^2 dt \leq 4 \int_0^{+\infty} f(t)^2 dt$.

6) a) On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_n^{n+1} f = 0$.

Or, par la formule de la moyenne, il existe x_n tel que $f(x_n) = \int_n^{n+1} f$. D'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$.

Autre preuve : Pour tout $\varepsilon > 0$, on ne peut avoir $f(x) \geq \varepsilon$ pour x assez grand.

Autrement dit, on peut trouver des valeurs de x arbitrairement grandes pour lesquelles $0 \leq f(x) < \varepsilon$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe x_n tel que $x_n \geq n$ et $f(x_n) = \frac{1}{n+1}$ (on prend ici $\varepsilon = \frac{1}{n+1}$).

On construit ainsi une suite réelle $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = 0$.

b) Soit $x \geq 0$. Comme f est k -lipschitzienne, on a $\forall t \geq x, f(x+h) \geq f(x) - kh$.

En considérant l'aire du triangle de hauteur $f(x)$ et de base $\left[x, x + \frac{f(x)}{k} \right]$, on a

$$\frac{f(x)^2}{2k} \leq \int_x^{x+h} f(t) dt \leq \int_x^{+\infty} f(t) dt \text{ donc par pincement, } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

7) a) On a : $\int_{1/n}^1 f(t) dt + \frac{1}{n} f(1) \leq S_n \leq \int_0^1 f(t) dt$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{1/n}^1 f(t) dt = \int_0^1 f(t) dt$, alors par pincement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \int_0^1 f(t) dt$.

b) On applique a) à la fonction $g(t) = -\ln \left(\sin \left(\frac{\pi}{2} t \right) \right)$ sur $]0, 1]$. On a $A = -\frac{\pi}{2} \int_0^1 g(t) dt$.

Donc $A = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2n} \sum_{k=1}^n \ln \left(\sin \left(\frac{k\pi}{2n} \right) \right)$. Or, $\prod_{k=1}^{n-1} \sin \left(\frac{k\pi}{2n} \right) = \sqrt{\prod_{k=1}^{2n-1} \sin \left(\frac{k\pi}{n} \right)} = \sqrt{\frac{2n}{2^{2n-1}}}$.

Donc $A = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2n} \ln \left(\sqrt{\frac{2n}{2^{2n-1}}} \right) = -\frac{\pi}{2} \ln 2$.