

TD n°3. Exemples de fonctions intégrables

Calculs d'intégrales

1) On considère K l'ensemble des $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x(t-1)^y} dt$ converge.

Représenter graphiquement K en hachurant la partie du plan (x, y) correspondante.

2) a) Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+1} dx$ converge.

b) Montrer (à l'aide de $y = \frac{1}{x}$) que $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+1} dx = 0$.

3) Calculer $J = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-|t|) \cos(t) dt$.

4) On pose $A = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin t) dt$, $B = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos t) dt$ et $C = \int_0^{\pi} \ln(\sin t) dt$.

a) Justifier l'existence de A .

b) Montrer que $A = B = \frac{1}{2}C$ et que $A + B = \frac{1}{2}C - \frac{\pi}{2} \ln 2$. En déduire A, B, C .

Fonctions de carré intégrable

5) (X) Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $f(0) = 0$. On suppose $(f')^2$ intégrable sur $[0, +\infty[$.

On pose $\Delta : x \mapsto \frac{f(x)}{x}$. Montrer que Δ^2 est intégrable sur $]0, +\infty[$ et que $\int_0^{+\infty} \Delta(x)^2 dx \leq 4 \int_0^{+\infty} f'(x)^2 dx$.

Indication : Justifier l'intégrabilité de Δ^2 en 0. Utiliser IPP + Cauchy-Schwarz pour évaluer $\int_0^x \Delta(t)^2 dt$.

Propriétés générales des fonctions intégrables

6) Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue, positive et intégrable. Les deux questions sont indépendantes.

a) Montrer qu'il existe $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = 0$.

Indication : Considérer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_n^{n+1} f(t) dt$,

ou bien noter que pour tout $\varepsilon > 0$, on ne peut avoir $f(x) \geq \varepsilon$ pour x assez grand.

b) (★) On suppose f lipschitzienne de rapport k . Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

7) a) Soit $f :]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction positive intégrable. On pose $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$.

On suppose f décroissante. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \int_0^1 f(t) dt$.

b) (★) On admet $\forall n \in \mathbb{N}^*, \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}$. Retrouver la valeur de $A = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x) dx$.