

TD n°2. Corrigé

Exercice A

On a $u_{n+1}^\alpha = u_n^\alpha(1 - \lambda u_n^{p-1} + o(u_n^{p-1}))^\alpha$, d'où $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha \sim -\alpha \lambda u_n^{p-1}$, d'où on prend $\alpha = -(p-1)$ et $\mu = (p-1)\lambda$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_{n+1}^{p-1}} - \frac{1}{u_n^{p-1}} = \mu$. Par Césaro, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \frac{1}{u_{n+1}^p} = \mu$, donc $x_n \sim \frac{1}{(\mu n)^{1/(p-1)}}$ (car $\mu \neq 0$).

Exercice B

1) a) Comme $\lim_{x \rightarrow a, x \neq a} \left| \frac{f(x) - a}{x - a} \right| = |f'(a)| < k$, alors au voisinage de a privé de a , on a $\left| \frac{f(x) - a}{x - a} \right| \leq k$.

Donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\forall x \in V = [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$, $|f(x) - a| \leq k|x - a|$.

Variante : Comme f' continue, on a $f'(x) < k$ sur un voisinage $V = [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$.

Par l'IAF, l'application f est k -lipschitzienne sur V , et donc a fortiori $|f(x) - a| \leq k|x - a|$.

b) On a $k \leq 1$. Pour tout $x \in V$, on a $|f(x) - a| \leq k|x - a| \leq |x - a|$, donc $\boxed{V \text{ est stable par } f}$.

Si $r_0 \leq \varepsilon$, c'est-à-dire $u_0 \in V$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in V$, et on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $r_{n+1} \leq k r_n$, d'où $\forall n \in \mathbb{N}$, $r_n \leq k^n r_0$.

c) Soit $x \in \Omega$. On a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(x) = a$. Pour n assez grand, on a $u_n(x) \in]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$.

On en déduit que pour y assez proche de a , on a encore $u_n(y) \in]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$, car u_n est continue.

Par b), on en déduit qu'on a alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(y) = a$, c'est-à-dire $y \in \Omega$. Donc Ω est ouvert.

2) Supposons par l'absurde $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ non stationnaire en a . Alors nécessairement $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq a$.

(en effet, s'il existait p tel que $u_p = a$, alors $\forall n \geq p$, $u_n = a$).

On a $\lim_{x \rightarrow a, x \neq a} \left| \frac{f(x) - a}{x - a} \right| = |f'(a)| > 1$, alors $\left| \frac{u_{n+1} - a}{u_n - a} \right| > 1$ pour n assez grand, ce qui contredit $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$.

3) *Remarque :* On a $f'(a) = -2a$ et on vérifie aisément que $a > \frac{1}{2}$, donc $f'(a) < -1$.

a) On a $u_{2n+2} = g(u_{2n})$ et g est croissante (car f décroissante).

Donc $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone : si $u_0 \leq u_2$, alors $g^{(n)}(u_0) \leq g^{(n)}(u_2)$, c'est-à-dire $u_{2n} \leq u_{2n+2}$.

De même si $u_0 \leq u_2$.

On procède de même avec $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$, car $u_{2n+1} = g(u_{2n-1})$.

b) On a $f([0, a[) =]a, 1]$ et $f(]a, 1]) = [0, a[$, donc $g([0, a[) = [0, a[$.

On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_{2n} < a$.

On a aussi $g(x) - x \leq 0$ pour tout $x \in [0, a[$. Donc $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

Elle converge vers L vérifiant $0 \leq L \leq u_0 < a$, donc $L = 0$.

Comme $u_{2n+1} = f(u_{2n})$, alors $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et converge vers $f(0) = 1$.

Compléments

1) On a $u_{n+1} \sim \lambda u_n$, donc $u_{n+1} \leq \mu u_n$ pour $n \geq p$ assez grand. D'où $u_n = O(\mu^n)$.

2) On a $\ln v_{n+1} - \ln v_n = \ln \left(\frac{v_{n+1}}{v_n} \right) = \ln \left(\frac{u_{n+1}}{\lambda u_n} \right)$. Or, $u_{n+1} = \lambda u_n + O(u_n^2)$.

Donc $\frac{u_{n+1}}{\lambda u_n} = 1 + O(u_n)$, donc $\ln \left(\frac{u_{n+1}}{\lambda u_n} \right) = O(u_n)$, car $\ln(1+h) = O(h)$.

3) Comme la série converge, les sommes partielles convergent, donc il existe $\beta = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln v_n$.

Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \exp(\beta) = \alpha > 0$. Donc $u_n \sim \alpha \lambda^n$.