

TD n°2. Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$

Exercice A. Etude asymptotique des suites récurrentes à convergence lente

Soit $f : [0, a] \rightarrow [0, a]$ continue telle que $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ et $\forall x \in]0, a[, 0 < f(x) < x$.

On suppose $0 < u_0 \leq a$. On vérifie aisément que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0^+$.

On suppose de plus $f(x) = x - \lambda x^p + o(x^p)$, avec $p \geq 2$ et $\lambda > 0$.

Trouver $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\mu > 0$ telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha = \mu$. En déduire que $u_n \sim \left(\frac{1}{(p-1)n} \right)^{1/(p-1)}$.

Exercice B. Points fixes fortement attractifs et fortement répulsifs

Soient I un intervalle ouvert, $f : I \rightarrow I$ une application de classe C^1 , et a un point fixe de f .

On considère $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. On pose $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, r_n = |u_n - a|}$.

1) On suppose $\boxed{|f'(a)| < 1}$. On dit alors que a est un point fixe (fortement) attractif.

Soit un réel k tel que $|f'(a)| < k < 1$.

a) Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\forall x \in [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$, $|f(x) - f(a)| \leq k|x - a|$.

On considère désormais le voisinage $V = [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$ et V est stable.

b) En déduire que V est stable et que si $r_0 < \varepsilon$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $r_n \leq k^n r_0$.

Remarque : En particulier, comme on a $k < 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = 0$, c'est-à-dire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$.

Terminologie : La convergence est dite *sous-exponentielle* (ou infra-géométrique).

c) (★) On note $u_n(x)$ pour signifier que u_n dépend de $u_0 = x$.

Montrer que $\Omega = \{x \in I \mid \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(x) = a\}$ est un ouvert.

Indication : Noter que $x \mapsto u_n(x)$ est continue.

2) On suppose $\boxed{|f'(a)| > 1}$. On suppose $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est stationnaire en a .

Indication : Par l'absurde et considérer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1} - a}{u_n - a} \right|$

3) Exemple de point fixe répulsif.

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_{n+1} = 1 - u_n^2$. On pose $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ $x \mapsto 1 - x^2$.

On note a le point fixe de f . On vérifie aisément (admis ici) que $|f'(a)| > 1$.

a) On pose $g = f \circ f$. Justifier que les suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont monotones.

b) On admet $g(x) - x = x(1 - x)(x - f(x))$. On suppose $0 \leq u_0 < a$.

Montrer que les suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent et préciser leurs limites.

C. Complément. Obtention d'un équivalent dans le cas d'un point fixe fortement attractif

On suppose f de classe C^2 , $f(0) = 0$ et $\boxed{f'(0) = \lambda, \text{ avec } 0 < \lambda < 1}$. On a ainsi $f(x) = \lambda x + O(x^2)$.

On montre aisément que pour $u_0 > 0$ assez petit, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0^+$.

1) Montrer qu'il existe $\mu < 1$ tel que $u_n = O(\mu^n)$. En particulier, la série $\sum u_n$ converge.

2) On pose $v_n = \frac{u_n}{\lambda^n}$. Montrer que $\ln v_{n+1} - \ln v_n = O(u_n)$.

On en déduit (*admis ici*) que la série $\sum (\ln v_{n+1} - \ln v_n)$ converge.

3) En déduire qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $u_n \sim \alpha \lambda^n$.

Exercice C

On considère des fonctions continues f et f_n définies sur $]0, 1[$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On suppose

- les fonctions f_n et f sont strictement croissantes et réalisent des bijections de $]0, 1[$ sur $] - 1, 1[$.
- Pour tout $x \in]0, 1[$, la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante et converge vers $f(x)$.

On note x_n l'unique réel tel que $f(x_n) = 0$, et L est l'unique réel tel que $f(L) = 0$.

1) Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante

2) Montrer que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers L .

Exercice C

1) On a $f_{n+1}(x_n) > f_n(x_n) = 0 = f_{n+1}(x_{n+1})$, donc $x_n > x_{n+1}$.

2) Soit $\varepsilon > 0$. On a $f_n(L) < f(L) = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(L + \varepsilon) = f(L + \varepsilon) > 0$.

Pour n assez grand, $f_n(L) < 0$ et $f_n(L + \varepsilon) > 0$, donc $L \leq x_n \leq L + \varepsilon$.

Interrogation n°3. Année 2019-2020. Barème sur 24 pts.

Remarque : On pourra supposer connue *sans justification* la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$.

2) a) [0 pt] Que valent $\tan(\frac{\pi}{4})$ et $\tan'(\frac{\pi}{4})$?

b) [2.5 pts] On considère $x_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)$ et $y_n = \left(\tan\left(\frac{\pi}{4}x_n\right)\right)^n$. Déterminer $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n$.

3) [3 pts] Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 vérifiant $\boxed{f(0) = f'(0) = 0 \text{ et } f''(0) = \lambda > 0}$.

On suppose de plus que $\forall x > 0, f(x) > 0$, c'est-à-dire f strictement positive sur $]0, +\infty[$.

Montrer que $g : x \mapsto \sqrt{f(x)}$ est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$.

4) On considère $P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$.

a) [1 pt] Exprimer $e^x - P_n(x)$ à l'aide d'une intégrale (cf reste intégral de Taylor-Lagrange).

b) [1 pt] On suppose $\boxed{n \text{ pair}}$.

Montrer avec a) que $\forall x \in]-\infty, 0]$, $P_n(x) \geq e^x$. En déduire que P_n n'a pas de racine sur $\mathbb{R}$.

c) [1.5 pt] On suppose $\boxed{n \text{ impair}}$. En considérant P_{n-1} , montrer que P_n admet une unique racine réelle.

5) Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 . On pose $\boxed{M = \sup |f'|}$.

a) [1.5 pt] On considère $[a, b]$ un segment inclus dans $[0, 1]$.

En utilisant l'inégalité des accroissements finis, démontrer : $\left| \int_a^b f(t) dt - (b-a)f(b) \right| \leq \frac{1}{2}(b-a)^2 M$.

b) [1.5 pt] On considère une subdivision $\sigma = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ de $[0, 1]$, c'est-à-dire $\boxed{0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1}$.

Le pas de la subdivision est défini par $\boxed{\Delta = \max_{1 \leq k \leq n} (x_k - x_{k-1})}$. Montrer que

$$\sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1})^2 \leq \Delta$$

et préciser les cas d'égalité.

c) [1 pt] Avec les notations du b), on pose $S = \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1})f(x_k)$ (somme de Riemann)

Montrer que $\left| \int_0^1 f(t) dt - S \right| \leq \frac{1}{2} \Delta M$.

7) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 vérifiant $f(0) = f'(0) = 0$.

a) [0.5 pt] Justifier que $\varphi : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \frac{f(x)}{x^2}$ admet un prolongement par continuité en 0.

b) [0.5 pt] Donner *sans justification* une condition suffisante sur K pour que $f(x) \leq Kx^2$ au voisinage de 0.

c) [0.5 pt] En utilisant a), montrer qu'il existe un réel L tel que $\forall x \in [-1, 1], f(x) \leq Lx^2$.

11) (★★) Question supplémentaire : On reprend les hypothèses du 7). Déduire de 7) c) qu'il existe un cercle Γ (non réduit à un point) à la fois tangent au graphe de f en $(0, 0)$ et situé au-dessus du graphe de f .