TD n°2. Corrigé

Exercice A

Première preuve : Par récurrence sur n. On pose $A_n = \prod_{k=1}^{n}(1+z_k) - 1$.

On a $(1+z_{n+1})A_n = \prod_{k=1}^{n+1}(1+z_k) - (1+z_{n+1}) = A_{n+1} - z_{n+1}$.

Donc $|A_{n+1}| \leq (1+|z_{n+1}|)\,|A_n| + |z_{n+1}| \leq \prod_{k=1}^{n+1}(1+|z_k|) - 1 - |z_{n+1}| + |z_{n+1}| = \prod_{k=1}^{n+1}(1+|z_k|) - 1$.

Seconde preuve : $\prod_{k=1}^{n}(1+z_k) - 1$ est une somme de termes de la forme $\prod_{i\in I} z_i$.

Et $\prod_{k=1}^{n}(1+|z_k|) - 1$ est la même somme, mais en remplaçant $\prod_{i\in I} z_i$ par $\prod_{i\in I} |z_i|$.

Or, on a $\left|\prod_{i\in I} z_i\right| \leq \prod_{i\in I} |z_i|$. Donc par inégalité triangulaire, $|\prod_{k=1}^{n}(1+z_k) - 1| \leq \prod_{k=1}^{n}(1+|z_k|) - 1$.

Exercice B

1) On a $f(0) = 2f(0)$, donc $f(0)$. En dérivant par rapport à x, on a $f'(x+y) = f'(x)$.

Donc f' est contante, d'où $f(x) = ax$. Réciproque immédiate.

2) a) On a $f(2^{-n}x) = f(x)$, donc en faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient par continuité $f(0) = f(x)$.

Donc les solutions vérifiant (E_1) sont les fonctions contantes.

b) Si f de classe C^1 vérifie (E_2), alors $2f'(2x) = 2f'(x)$, donc f' est contante. Comme $f(0) = 0$, alors $f(x) = ax$.

3) On a $\forall (p,q) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$, $qf\left(\dfrac{p}{q}\right) = f(p) = pf(a)$.

Donc $\forall r \in \mathbb{Q}$, $f(r) = ra$. Par densité de $\mathbb{Q}$, on obtient $f(x) = ax$. Réciproque immédiate.

4) On a $f(2^{-n}x) = 2^{-n}f(x)$. Comme $f(0) = 0$, alors $f'(0) = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{f(2^{-n}x)}{2^{-n}x} = \dfrac{f(x)}{x}$.

Donc $f(x) = xf'(0)$, donc est de la forme ax. Réciproque immédiate.

Exercice C

1) Posons $L = \lim_{x\to+\infty} f(x)$. Pour $x \geq a$ assez grand, $|f(x)| \leq |L| + 1$.

Donc f est bornée sur $[a,+\infty[$. Et f est bornée sur le segment $[0,a]$. Donc f est bornée sur $\mathbb{R}$.

2) Il existe $a \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \geq a \Rightarrow f(x) \geq f(0)$. Posons $m = \inf_{[0,a]} f = \min f([0,a])$.

Pour $x \geq a$, on a $f(x) \geq f(0) \geq m$, donc m minore f sur $\mathbb{R}$ entier. Comme il est atteint, $m = \min f(\mathbb{R})$.

Exercice D

1) On applique l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction exp sur $[0,1]$.

On a donc $0 < e - \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!} \leq \dfrac{1^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{[0,1]} \exp^{(n+1)} = \dfrac{e}{(n+1)!}$.

(*Variante* : $e - \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{1}{k!} = \dfrac{1}{(n+1)!}\left(\dfrac{1}{n+2} + \dfrac{1}{(n+2)(n+3)} + ...\right) \leq \dfrac{e}{(n+1)!}$).

Or, $\sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!} = \dfrac{A_n}{n!}$ où $A_n = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{n!}{k!}$ est un entier naturel.

On a donc bien $\dfrac{A_n}{n!} < e \leq \dfrac{A_n}{n!} + \dfrac{e}{(n+1)!}$, c'est-à-dire $A_n < n!e \leq A_n + \dfrac{e}{n+1}$.

2) Supposons par l'absurde $e = \dfrac{p}{q}$. Pour $n \geq q$, on a donc $n!e \in \mathbb{N}$.

Et pour n.as

Exercice supplémentaire. Densité de $(e^{in\theta})_{n\in\mathbb{N}}$ sur le cercle trigonométrique

1) La suite est périodique ssi il existe $p \in \mathbb{N}^*$ telle que $e^{ip\theta} = 1$ c'est-à-dire $e^{i\theta}$ racine de l'unité.

Donc la suite est périodique ssi θ est la forme $\dfrac{2k\pi}{p}$, c'est-à-dire $\theta \in 2\pi\mathbb{Q}$.

2) Supposons $e^{in\theta} = e^{im\theta}$. Alors $e^{i(m-n)\theta} = 1$. Comme $\theta \notin 2\pi\mathbb{Q}$, alors $(m-n) = 0$.

3) On applique le principe des tiroirs aux $(n\theta \bmod 2\pi)$ qui appartiennent à $[0, 2\pi[$.

Il y a une infinité de termes sur $[0, 2\pi]$, donc au moins diffèrent de moins de ε.

4) On a $\omega = e^{ip\theta} = e^{i\alpha}$, avec $|\alpha| \leq \varepsilon$. On a nécessairement $\alpha \neq 0$.

Comme on peut choisir φ modulo 2π, on peut choisir φ et α de même signe.

On approche φ par un multiple de α : il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $|\varphi - k\alpha| < \alpha \leq \varepsilon$. Donc angle$(z, \omega^k) \leq \varepsilon$.