TD n°2. Continuité

Exercice A. (*début sujet Centrale 2024*) Soient des nombres complexes $z_1, ..., z_n$.

Montrer que $|\prod_{k=1}^{n}(1+z_k)-1| \leq \prod_{k=1}^{n}(1+|z_k|)-1$.

Exercice B. Exemples d'équations fonctionnelles

Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on considère

$$(E_0) : f(x+y) = f(x)+f(y) \quad , \quad (E_1) : f(2x) = f(x) \quad , \quad (E_2) : f(2x) = 2f(x)$$

1) Montrer que les fonctions de classe C^1 vérifiant (E_0) sont les $x \longmapsto ax$.

2) a) Montrer que les fonctions continues en 0 vérifiant (E_1) sont les fonctions constantes.

b) En déduire que les fonctions de classe C^1 vérifiant (E_2) sont les $x \longmapsto ax$.

3) Soit f continue vérifiant (E_0).

On vérifie aisément que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $f(nx) = nf(x)$.

On pose $a = f(1)$. Montrer que $\forall r \in \mathbb{Q}$, $f(r) = ra$. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax$.

4) Montrer que les fonctions dérivables en 0 vérifiant (E_2) sont les $x \longmapsto ax$.

Exercice C. Compacité et continuité

1) Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue. On suppose que f converge en $+\infty$. Montrer que f est bornée.

2) Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Montrer que $\inf f$ est atteint.

Indication : Considérer a tel que $\forall x \geq a$, $f(x) \geq f(0)$, puis m le minimum de f sur $[0,a]$.

Exercice D. Exemple d'irrationnalité

1) On considère $\boxed{e = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{n!}}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un entier A_n tel que

$$A_n < n!e \leq A_n + \frac{e}{n+1}$$

Remarque : On rappelle aussi l'inégalité de Taylor-Lagrange : $\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(0)\dfrac{x^k}{k!} \right| \leq \dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{(0,x]} \left| f^{(n+1)} \right|$.

2) En déduire que e est irrationnel.

Exercice supplémentaire (★) . Densité de $(e^{in\theta})_{n\in\mathbb{N}}$ sur le cercle trigonométrique

1) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Donner une CNS sur θ pour que $(e^{in\theta})_{n\in\mathbb{N}}$ soit périodique.

2) On suppose *désormais* que $\theta \notin 2\pi\mathbb{Q}$. Montrer que la suite $(e^{in\theta})_{n\in\mathbb{N}}$ est injective.

3) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $n < m$ tels que angle$(e^{in\theta}, e^{im\theta}) \leq \varepsilon$.

4) On pose $p = m - n$. On pose $\omega = e^{ip\theta}$. Par 3), on a donc angle$(1, \omega) \leq \varepsilon$.

Montrer que pour tout $z = e^{i\varphi} \in U$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que angle$(z, \omega^k) \leq \varepsilon$.

A fortiori, on a donc $\left| z - \omega^k \right| \leq \varepsilon$.

Remarque : On en déduit ainsi que $(e^{in\theta})_{n\in\mathbb{N}}$ est dense sur le cercle unité U.